

组合数学

刘勇

2026

Contents

1 基本计数	2
1.1 集合	2
1.2 函数与双射	3
1.3 加法原理和乘法原理	3
1.4 序列	4
1.5 排列	5
1.6 子集	5
1.7 多重集合	6
1.8 取球问题	7
1.9 习题	7
2 鸽笼原理	8
2.1 基本形式	8
2.2 函数形式	8
2.3* Ramsey 数	9
2.4 习题	10
3 分配问题	11
3.1 分配问题：不同小球/不同盒子	11
3.2 组合证明	11
3.3 分配问题：相同小球/不同盒子	12
3.4 组合证明（续）	12
3.5 二项式定理	13
3.6 分配问题：不同小球/相同盒子	14
3.7 分配问题：相同小球/相同盒子	17
3.8 多项式	19
3.9 习题	20
4 容斥原理	22
4.1 容斥原理	23
4.2 习题	26

5 生成函数27

5.1 引言27

5.2 生成函数28

5.3 递推关系31

5.4 斐波那契数列 (Fibonacci) 的生成函数31

5.5* 指数型生成函数32

5.6* 第二类 Stirling 数的生成函数33

5.7* $P(n)$ 的生成函数34

5.8 习题34

习题提示36

§ 1 基本计数

本章目标

1. 用双射比较大小，理解 $[n]$ 与 $|A|$ 。

2. 掌握加法原理、乘法原理。

3. 会计数序列、排列、子集与多重集合。

4. 会把取球问题对应到上述四种模型。

计数就是问一个集合有多少个元素。比较两个集合是否一样多，靠的是双射。

1.1 集合

集合 (set) 由元素 (element) 组成。 $a \in A$ 表示元素 a 属于集合 A 。不含任何元素的集合称为空集 (empty set)，记为 $\emptyset$ 。集合可以通过枚举其中的元素来描述，例如， $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ 表示自然数集；也可以通过元素所满足的性质来描述，例如， $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ 是偶数}\}$ 表示自然数中的偶数集，其中 “ $x \in \mathbb{N}$ ” 限定了考虑的范围。 $\{x \mid x \notin x\}$ 不是集合 (你能证明吗?)。

定义 1.1 如果对任意 $x \in A$ 都有 $x \in B$ ，则称 A 是 B 的子集 (subset)，记为 $A \subseteq B$ ，即 A 中每个元素都属于 B 。

定义 1.2 $A = B$ 当且仅当 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ ，也就是它们含有完全相同的元素。

因此 $\{0, 1\} = \{1, 0, 1, 0\}$ ：次序与重复都不计。

常用运算：

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$
$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}.$$

例 1.3 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$, 则 $A \cup B = \{a, b, c, d\}$, $A \cap B = \{b, c\}$, $A \setminus B = \{a\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ 。

(a, b) 表示序对： $(a, b) = (c, d)$ 当且仅当 $a = c$ 且 $b = d$ (顺序重要)。

定义 1.4 (笛卡尔积)

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

例 1.5 $A = \{0, 1\}$, $B = \{x, y, z\}$, 则 $A \times B$ 有 6 个序对，而 $B \times A$ 是另一批序对。一般而言， $A \times B \neq B \times A$ 。在什么情况下会有 $A \times B = B \times A$ ？

1.2 函数与双射

函数 $f: A \rightarrow B$ 把 A 中每个元素对应到 B 中唯一一个元素，写作 $f(a)$ 。称 A 为定义域， B 为陪域。值域为

$$\text{ran } f = \{f(a) \mid a \in A\}.$$

定义 1.6 设 $f: A \rightarrow B$ 。

- f 是单射 (injective)，如果不同的点送到不同的点，即若 $f(a_1) = f(a_2)$ ，则 $a_1 = a_2$ 。
- f 是满射 (surjective)，如果 B 中每个点都被取到：对任意 $b \in B$ ，存在 $a \in A$ 使得 $f(a) = b$ 。
- f 是双射 (bijective)，如果它既是单射，也是满射。此时 A 与 B 的元素一一配对。

定义 1.7 给定 $f: A \rightarrow B$ 和 $b \in B$ ，原像

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}.$$

每个 $a \in A$ 恰好落在一个原像里，所以这些原像把 A 分成两两不交的块（有的块可能是空集）：

定理 1.8 给定 $f: A \rightarrow B$ ，则 $A = \bigcup_{b \in B} f^{-1}(b)$ ；若 $b_1 \neq b_2$ ，则 $f^{-1}(b_1) \cap f^{-1}(b_2) = \emptyset$ 。

证明 任取 $a \in A$ ，则 $a \in f^{-1}(f(a))$ ，故 $A \subseteq \bigcup_{b \in B} f^{-1}(b)$ 。反过来每个原像都是 A 的子集，并起来仍在 A 中。若某个 a 同时属于 $f^{-1}(b_1)$ 与 $f^{-1}(b_2)$ ，则 $b_1 = f(a) = b_2$ 。□

两个集合一样多，当且仅当存在双射把它们的元素一一配对。

定义 1.9 如果存在双射 $f: A \rightarrow B$ ，则称 A 和 B 等势，记作 $A \approx B$ 。

为了说出“有多少个”，用 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ 当尺子：

定义 1.10 如果 $A \approx [n]$ ，则称集合 A 包含 n 个元素，记为 $|A| = n$ 或 $\#A = n$ 。

于是 $|[n]| = n$ 。本课此后只讨论有穷集合，即存在某个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $|A| = n$ ；此时也称 A 为 n -集合。若 $|A| = n$ ，我们常写 $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ （不同下标表示不同元素）：这不过是把某个双射 $f: [n] \rightarrow A$ 记成 $a_i = f(i)$ 。

1.3 加法原理和乘法原理

定义 1.11 A 和 B 不相交 (disjoint)，如果 $A \cap B = \emptyset$ 。

定理 1.12 (加法原理) 如果 A 和 B 不相交，则

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

证明 设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ， $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ 。我们需要证明 $A \cup B \approx [n+m]$ 。考虑函数 $f: [n+m] \rightarrow A \cup B$ ，

$$f(i) = \begin{cases} a_i & i \leq n \\ b_{i-n} & i > n \end{cases}.$$

你能验证 f 是双射吗？

□

推论 1.13 若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两不相交，则

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|.$$

□

定理 1.14 (乘法原理 (弱形式))

$$|A \times B| = |A| \times |B|.$$

证明 设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$. 令 $C_i = \{(a_i, b) \mid b \in B\}$. 注意到:

- $C_1, C_2, \dots, C_n$ 两两不相交;
- $|C_i| = |B| = m$.
- $A \times B = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$.

因此, 由加法原理得到

$$|A \times B| = |C_1| + |C_2| + \dots + |C_n| = n \times m = |A| \times |B|.$$

□

推论 1.15

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \dots \times |A_n|.$$

□

乘法原理的标准叙述比较直观: 若一个结果由依次进行的若干步骤组成, 第一步有 a_1 种选择; 无论此前如何选择, 第二步都有 a_2 种选择; $\dots$; 无论此前如何选择, 第 n 步都有 a_n 种选择, 则总方法数等于各步可选数目之积 $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$. 我们后面会频繁使用这一想法. 各步的选项不必取自固定集合, 只要求每一步的选择数恒定; 而推论 1.15 中第 i 步的选项均来自集合 A_i .

下面这个例子说明乘法原理的使用需要小心一些。

例 1.16 从 52 张扑克牌中抽两张, 一张面朝下, 一张面朝上. 朝下的是 A、朝上的是红桃, 共有多少种情况?

解答提示 易错点在于红桃 A 可能被重复计数. 例如, “先取朝下的 A, 再取朝上的红桃” 与 “先取朝上的红桃, 再取朝下的 A” 若按不同的分步方式处理, 容易重复计数. 一种稳妥做法是按朝下的牌是否为红桃 A 分类: 若是, 则朝上的牌可从其余 12 张红桃中选; 若朝下的是其余 3 张 A 之一, 则朝上的牌可从 13 张红桃中选. 总数为 $1 \cdot 12 + 3 \cdot 13 = 51$. □

1.4 序列

定义 1.17 取自 A 的 k -序列是有顺序的 k 个元素 $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, 通常也简记为 $a_1 a_2 \dots a_k$. 我们用 A^k 表示全体这样的序列。

例 1.18 取自 $\{0, 1\}$ 的 3-序列一共有 8 个:

$$000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.$$

这种形式的序列也可称为长度为 3 的 01 字符串。

我们常常用字母 σ 表示一个序列. 例如, 用 σ 表示 $a_1 a_2 \dots a_k$. 此时, 我们记 $\sigma(i) = a_i$. 实际上, 可以认为 $\sigma: [k] \rightarrow A$ 是一个函数:

命题 1.19 取自 A 的 k -序列和从 $[k]$ 到 A 的函数之间有双射。

证明 我们可以将序列 $a_1 a_2 \dots a_k$ 映射到 $f: [k] \rightarrow A$, 其中 $f(i) = a_i$. □

使用乘法原理可得 $|A^k| = |A|^k$. 因此, 从 $[k]$ 到 A 的函数一共有 $|A|^k$ 个。

命题 1.20 若 $|A| = n$, 令 $B = \{0, 1\}^n$, 则存在双射 $f: \mathcal{P}(A) \rightarrow B$.

证明 设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. 取 $X \subseteq A$, 定义 $f(X) = \sigma$, 其中

$$\sigma(i) = 1 \leftrightarrow a_i \in X.$$

可以验证 f 是一个双射。 □

推论 1.21 $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$. □

1.5 排列

定义 1.22 取自 A 的 k -排列 (k -permutation) 是满足 $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$, 且当 $i \neq j$ 时 $a_i \neq a_j$ 的序列。如果 $|A| = k$, 则 $(a_1, \dots, a_k)$ 也称为 A 的一个全排列 (permutation)。

例 1.23 取自 $[3]$ 的 2-排列一共有 6 个:

$$12, 13, 21, 23, 31, 32.$$

定义 1.24 用 $(n)_k$ 表示取自 $[n]$ 的 k -排列的个数。

由定义, 我们立刻知道 (为什么?) $k > n$ 时, $(n)_k = 0$ 。

定理 1.25 当 $k \leq n$ 时, $(n)_k = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)$ 。因此, $(n)_n = n!$ 。

证明 第 1 位有 n 种选法, 第 2 位有 $n-1$ 种, $\dots$, 第 k 位有 $n-k+1$ 种。由乘法原理即得。 □

例 1.26 若 $k \leq n$, 有多少种从 $[k]$ 到 $[n]$ 的单射?

解 与取自 $[n]$ 的 k -排列一一对应, 共 $(n)_k$ 个。 □

1.6 子集

定义 1.27 X 是 A 的一个 k -子集 (k -subset), 如果 $X \subseteq A$ 并且 $|X| = k$ 。

定义 1.28 用 $\binom{n}{k}$ 表示 $[n]$ 的 k -子集的个数。

由定义, 我们立刻知道 $k > n$ 时, $\binom{n}{k} = 0$ 。那么, $k \leq n$ 时, $\binom{n}{k}$ 是多少?

定理 1.29 当 $k \leq n$ 时,

$$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

证明 取自 $[n]$ 的 k -排列一共有 $(n)_k$ 个。分两步: 先从 $[n]$ 中选出 k 个数, 再将它们排序。由乘法原理得 $\binom{n}{k} \cdot k! = (n)_k$ 。 □

命题 1.30

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

证明 1 定义 $f(X) = [n] \setminus X$, 则 f 在 k -子集与 $(n-k)$ -子集之间给出一个双射。 □

证明 2

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

□

注 1.31 证明 1 揭示了一个数学事实, 而证明 2 只是对定义进行一番机械操作。在这门课中, 我们不推崇证明 2 的方法。

命题 1.32

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

证明 令 $S_k = \{X \subseteq [n] \mid |X| = k\}$, 则

$$2^n = |\mathcal{P}([n])| = \sum_{k=0}^n |S_k| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k},$$

其中第二个等号是加法原理的运用。 □

注 1.33 这是二项式定理 3.7 的一个特殊情况。

例 1.34 从 [200] 到 [2025] 的严格单调增函数一共有多少个？

解 令 S 表示所有这些函数的集合， T 表示 [2025] 的 200-子集。我们定义 $\varphi : S \rightarrow T$ 使得

$$\varphi(f) = \text{ran } f,$$

可以验证（请验证！） φ 为双射。因此

$$|S| = |T| = \binom{2025}{200}.$$

□

命题 1.35 考虑 $P_k = \{X \subseteq [n] \mid |X| = k\}$ 和 $Q_k = \{\sigma \in \{0, 1\}^n \mid |\sigma^{-1}(1)| = k\}$ ，则 $P_k \approx Q_k$ 。

证明 令 $f(\sigma) = \sigma^{-1}(1)$ 。可以验证 f 是一个双射。 □

这个命题告诉我们，每一个 k -子集都对应一个恰有 k 个 1 的 n -序列（取自 $\{0, 1\}$ ）。

注 1.36 看到 $\binom{n}{k}$ 时，首先应该想到它的组合含义：它描述了哪类对象的个数，而不是立即计算。

例 1.37 两位选手比赛，采用七局四胜制，有多少种可能的赛况？见习题 1.18。

偶数个元素的子集个数见习题 1.10。

1.7 多重集合

3 个人在咖啡店点咖啡，共有 10 种咖啡可选，会产生多少种订单？店家不关心谁点了什么：例如，“拿铁、美式、拿铁”与“美式、拿铁、拿铁”是同一订单。这类对象用多重集合（multiset）描述，即允许元素重复的“集合”。给定 $|A| = n$ ，若多重集合 X 满足 $|X| = k$ ，则称 X 为取自 A 的 k -多重集合。上述订单即取自 10 种咖啡的 3-多重集合。先给这个个数一个记号。

定义 1.38 用 $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$ 表示取自 $[n]$ 的 k -多重集合的个数。

咖啡订单问的就是 $\left(\!\!\binom{10}{3}\!\!\right)$ 。为了算出一般的 $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$ ，先看 $n = 3, k = 2$ 。

表 1 的每一行是一种取自 $\{a, b, c\}$ 的 2-多重集合：用与重数相同个数的 0 表示该元素出现几次，类别之间留出空白。这样 $\left(\!\!\binom{3}{2}\!\!\right) = 6$ 。把空白改写成 1，第 4 列就是全

Table 1: 2-多重集合与 01 序列的对应			
元素 a	元素 b	元素 c	对应的 01 序列
00			0011
	00		1001
		00	1100
0	0		0101
0		0	0110
	0	0	1010

体含 2 个 0 的 4-长 01 序列，故 $\left(\!\!\binom{3}{2}\!\!\right) = \binom{4}{2}$ 。一般地，用 k 个 0 表示 k 个元素，用 $n - 1$ 个 1 隔开 n 种类别，序列长度是 $k + n - 1$ ，因此含 k 个 0 的此类序列一共 $\binom{n+k-1}{k}$ 个。

定理 1.39 $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$ 。 □

例 1.40 4 个候选人，2023 张票，有多少种结果？

解 即取自 4 种候选人的 2023-多重集合, 共 $\left(\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 2023 \end{smallmatrix}\right)\right)$ 种。 □

严格单调增函数对应子集; 单调不减则对应多重集合。

例 1.41 从 $[k]$ 到 $[n]$ 的单调不减函数一共有多少个?

解 令 $f(i) = x_i$, 则 $1 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_k \leq n$ 。这与取自 $[n]$ 的 k -多重集合 $\{x_1, \dots, x_k\}$ 一一对应, 因此共 $\left(\left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right)\right)$ 个。 □

1.8 取球问题

从 n 个不同小球中取 k 次, 按是否放回、是否计顺序, 对应四种计数, 见表 2。

Table 2: 取球问题的四种基本模型		
数量	组合对象	取球条件
n^k	k -序列	有放回有顺序
$(n)_k$	k -排列	无放回有顺序
$\binom{n}{k}$	$[n]$ 的 k -子集	无放回无顺序
$\left(\left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right)\right)$	$[n]$ 的 k -多重集合	有放回无顺序

1.9 习题

习题 1.1 考虑从 $[10]$ 到 $[30]$ 的函数: 函数总数是多少? 其中有多少个严格单调增函数? 有多少个单调不减函数?

习题 1.2 写出函数到序列、单射到排列、严格单调增函数到子集、单调不减函数到多重集合的一一对应。

习题 1.3 9 个人站成 6 个不同的队列 (允许空队列, 每个队列中需要区分前后顺序), 一共有多少种方法? 不允许空队列时有多少种方法?

习题 1.4 1. 10 个人站成一圈, 有多少种站法?
2. 5 名男生、5 名女生站成一圈, 其中女生互不相邻, 有多少种站法?
3. 6 名男生、4 名女生站成一圈, 其中女生互不相邻, 有多少种站法? 运用乘法原理时, 如果第一步让男生先站, 接着怎么做? 如果第一步让女生先站, 接着怎么做?

习题 1.5 $[15]$ 的 6-排列中有多少个是数字从小到大排列的?

习题 1.6 取自 $[10]$ 的 4-排列中, 有多少最大数字等于 6? 有多少最大数字 ≤ 6 ?

习题 1.7 8 名男生、6 名女生排成一圈, 并且女生互不相邻, 一共有多少种方法?

习题 1.8 证明: 任意 k 个连续整数的乘积都能被 $k!$ 整除。

习题 1.9 有 n 个不同整数, 从中选出两个非空组, 要求第一组的最大数小于第二组的最小数, 共有多少种选法?

习题 1.10 给定 $n > 0$, 证明

$$\sum_{k \text{ 为奇数}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ 为偶数}} \binom{n}{k} = 2^{n-1}.$$

习题 1.11 掷 5 枚骰子, 将点数从小到大排列, 一共有多少种结果? 5 枚骰子的点数互不相同又有多少种结果?

习题 1.12 16 个相同的糖果分给 5 个小朋友, 并且每个小朋友至少有一个糖果, 一共有多少种分法? 当 $k \geq n$ 时, k 个相同的糖果分给 n 个小朋友呢?

习题 1.13 一共有多少个 (x_1, x_2, x_3) 满足 $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, 并且 x_i 均为非负整数?

习题 1.14 一共有多少个 (x_1, x_2, x_3, x_4) 满足 $x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 15$, 并且 x_i 均为非负整数?

- 习题 1.15** 10 把椅子共有 9 种颜色（其中两把颜色相同，其余颜色各不相同）。将这 10 把椅子围成一圈，一共有多少种排法？
- 习题 1.16** 从 [10] 中挑 3 个数字，要求所挑数字不相邻。一共有多少种方法？
- 习题 1.17** [12] 的所有子集中有多少个子集包含 {1, 3, 5, 7, 9, 11}？
- 习题 1.18** 两位选手比赛，七局四胜制，一共有多少种赛况？
- 习题 1.19** 取自 [7] 的 3-序列中有多少个序列是相邻数字各不相同的？
- 习题 1.20** $1\binom{10}{1} + 2\binom{10}{2} + 3\binom{10}{3} + \cdots$ 等于多少？
- 习题 1.21** $\binom{5}{9} + \binom{5}{8} + \cdots + \binom{5}{0}$ 等于多少？
- 习题 1.22** $\binom{10}{0} + \binom{10}{2} + \binom{10}{4} + \binom{10}{6} + \binom{10}{8} + \binom{10}{10}$ 等于多少？
- 习题 1.23** 从 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9, 9 中选择 3 个数字，一共有多少种方法？
- 习题 1.24** 从 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 7, 7, 7 中选择 6 个数字，一共有多少种方法？
- 习题 1.25** 7 把椅子围成一圈，其中 3 把颜色相同，其余颜色各不相同。一共有多少种排法？

§2 鸽笼原理

本章目标

1. 掌握鸽笼原理的基本形式与函数形式。
2. 会选择鸽子与鸽笼，并完成简单应用。

第 1 章问的是“有多少”。有时只需断定“至少有多少”，不必精确计数。这就是鸽笼原理。

2.1 基本形式

定理 2.1 (基本形式) 将 $> n$ 只鸽子放入 n 个鸽笼中，则至少有一个鸽笼里有 > 1 只鸽子。

证明 假设不然，每个鸽笼最多有 1 只鸽子，一共有 n 个鸽笼，所以总共最多有 $1 \cdot n = n$ 只鸽子，矛盾。 $\square$

鸽子和鸽笼往往以其他形式出现。假设一个人的头发最多有 30 万根，可能的根数为 $0, 1, \dots, 300000$ ，共 300001 种。若一个城市的人口多于 300001，则至少有两个人的头发根数完全相同。这时的鸽子和鸽笼分别是什么？

例 2.2 边长为 1 的正方形中有 5 个点，则至少有两个点相距 $\leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。这个例子中，鸽子和鸽笼不太明显。我们将正方形等分成 4 个小正方形（鸽笼），则至少有一个小正方形包含 ≥ 2 个点（鸽子）。类似地，如果有 10 个点，则至少有两个点相距 $\leq \frac{\sqrt{2}}{3}$ 。

可以看出，如何选取鸽子和鸽笼很关键。

2.2 函数形式

定理 2.3 (函数形式) 设 $f: A \rightarrow B$ 。若 $|A| > |B|$ ，则 f 不是单射。等价地，存在 $b \in B$ 使得 $|f^{-1}(b)| \geq 2$ ，即存在不同的 $x, y \in A$ 满足 $f(x) = f(y)$ 。 $\square$

例 2.4 一定存在一个只由数字 0, 1 组成且能被 12 整除的十进制正整数。

证明 令 $a_i = \sum_{k=0}^i 10^k$ 。考虑集合 $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{12}\}$ ，定义 $f: A \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 11\}$ 为 $f(a_i) = a_i \bmod 12$ 。由鸽笼原理知，存在 a_i, a_j 使得

$$f(a_i) = f(a_j).$$

不妨假设 $i < j$, 则 $a_j - a_i$ 被 12 整除, 并且每一位都是 0 或 1。□

注 2.5 事实上, A 可以取为 $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ 的任意一个 12-子集。进一步地, 对形如 $a_i = \sum_{k=0}^i 10^k$ 的数有 $a_i \not\equiv 0 \pmod{12}$, 从而 $|\text{ran } f| \leq 11$; 因此取 12 个数即可保证结论。

由鸽笼原理我们知道 $f: [10] \rightarrow [3]$ 不是单射。不难看出, 一定存在 $b \in [3]$ 使得 $|f^{-1}(b)| \geq 4$ 。因此我们可以得到鸽笼原理的一个更一般的形式。先约定: 给定实数 α ,

$$[\alpha] = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq \alpha\}.$$

定理 2.6 设函数 $f: A \rightarrow B$, 其中 $B \neq \emptyset$ 。若 $|A| > |B|$, 则存在 $b \in B$ 使得 $|f^{-1}(b)| \geq \left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil$ 。

证明 注意到, 对于整数 n 和实数 α , 有 $n \geq \alpha \leftrightarrow n \geq [\alpha]$ (请验证)。反设对任意 $b \in B$, 都有 $|f^{-1}(b)| < \frac{|A|}{|B|}$ 。则

$$|A| = \sum_{b \in B} |f^{-1}(b)| < |B| \cdot \frac{|A|}{|B|} = |A|,$$

其中第一个等号由定理 1.8 及加法原理得到。这就产生了矛盾。□

例如, 对于函数 $f: [n^2 + 1] \rightarrow [n]$, 一定存在 $k \in [n]$ 满足 $|f^{-1}(k)| \geq n + 1$ 。

例 2.7 (Erdős-Szekeres 定理) 设 S 是一个由 $n^2 + 1$ 个互不相同数组成的序列, 则一定能找到 S 的一个长度为 $n + 1$ 的子序列 S' (不必相邻), 使得 S' 严格单调递增或严格单调递减。

证明 将 S 记为 $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ 。定义函数 LIS (longest increasing subsequence), 使 $LIS(i)$ 为序列 $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n^2+1}$ 中以 a_i 为首项的最长严格单调递增子序列的长度。

如果存在 i 使得 $LIS(i) \geq n + 1$, 则证毕。现在假设对所有 $i \in [n^2 + 1]$ 都有 $LIS(i) \leq n$ 。因此 $LIS: [n^2 + 1] \rightarrow [n]$, 由鸽笼原理知, 存在 $k \in [n]$ 以及 $i_1 < i_2 < \dots < i_{n+1}$ 使得

$$LIS(i_1) = LIS(i_2) = \dots = LIS(i_{n+1}) = k.$$

我们只需验证 $a_{i_1} > a_{i_2} > \dots > a_{i_{n+1}}$ 。若存在 $r \in [n]$ 使得 $a_{i_r} < a_{i_{r+1}}$, 则

$$k = LIS(i_r) \geq LIS(i_{r+1}) + 1 = k + 1,$$

矛盾。□

例 2.8 任给 6 个人, 至少能找到 3 个人, 使他们相互都认识或相互都不认识。

证明 设 6 个人编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6。我们定义 $f: [5] \rightarrow \{0, 1\}$ 满足

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } n \text{ 和 } 6 \text{ 相互认识} \\ 0, & \text{如果 } n \text{ 和 } 6 \text{ 相互不认识} \end{cases}.$$

由鸽笼原理知, 存在互不相同的 $n_1, n_2, n_3 \in [5]$ 满足 $f(n_1) = f(n_2) = f(n_3)$, 不妨假设 $f(n_1) = 1$ 。若 n_1, n_2, n_3 相互不认识, 则得证; 如果其中有两人相互认识, 不妨假设为 n_1 和 n_2 , 则 $n_1, n_2, 6$ 这三个人相互认识, 得证。□

2.3* Ramsey 数

定义 2.9 对于任意集合 A , 令 $A^{[k]} = \{e \subseteq A \mid |e| = k\}$ 。

定义 2.10 如果 $E \subseteq V^{[2]}$, 则称 (V, E) 是一个无向图。此时, 称 V 为顶点集, E 为边集, $|V|$ 为图的阶。

如果 $E = V^{[2]}$, 则称该图为完全图。如果 $|V| = n$, 则称其为 n 阶完全图。

如果 $E = \emptyset$, 则称该图为空图。如果 $|V| = n$, 则称其为 n 阶空图。如果顶点集 $I \subseteq V$ 中任意两点之间都没有边, 则称 I 为独立集。

定义 2.11 如果 $V' \subseteq V$ 且 $E' \subseteq E \cap (V')^{[2]}$, 则称 (V', E') 是 (V, E) 的子图。若进一步有 $E' = E \cap (V')^{[2]}$, 则称 (V', E') 为导出子图。

定义 2.12 Ramsey 数 $R(n, m)$ 是满足如下性质的最小自然数 k : 任意一个 k 阶图都包含一个 n 阶团 (即 n 阶完全导出子图) 或一个大小为 m 的独立集。

例 2.8 说明 $R(3, 3) \leq 6$ 。

定理 2.13 $R(3, 3) = 6$ 。

证明 练习。 □

关于 $R(m, n)$ 的已知结果, Chung 和 Grinstead (1983) 给出了截至 1983 年的综述; Radziszowski (2021) 维护着该领域最新结果与最优界的列表。表 3 总结了目前已经确定的一些 Ramsey 数, 最后一列列出首次给出相应结果的文献。

Table 3: 部分已知的 Ramsey 数			
m	n	$R(m, n)$	参考文献
3	3	6	Greenwood and Gleason (1955)
3	4	9	Greenwood and Gleason (1955)
3	5	14	Greenwood and Gleason (1955)
3	6	18	Graver and Yackel (1968)
3	7	23	Kalbfleisch (1966)
3	8	28	McKay and Min (1992)
3	9	36	Grinstead and Roberts (1982)
4	4	18	Greenwood and Gleason (1955)
4	5	25	McKay and Radziszowski (1995)

此外, Exoo (1989) 证明 $R(5, 5) \geq 43$; Angelteit 和 McKay (2024) 证明 $R(5, 5) \leq 46$, 也就是说, 目前已知:

$$43 \leq R(5, 5) \leq 46.$$

思考: 顶点数为 43 的图有多少个?

2.4 习题

- 习题 2.1** 设 $n \geq 1$, S 是 $[2n]$ 的 $(n+1)$ -子集。证明: S 中能找到两个数, 使它们相加为 $2n+1$ 。
- 习题 2.2** 设有 k 个鸽笼, 第 i 个鸽笼最多能放 n_i 只鸽子。若有 $n_1 + n_2 + \cdots + n_k - k + 1$ 只鸽子, 则必有某个鸽笼中的鸽子数达到其容量上限。证明该命题。
- 习题 2.3** 证明: 从 $[2n]$ 中任取 $n+1$ 个数, 其中必有两个数相邻。
- 习题 2.4** 证明: 从 $[12]$ 中任取 7 个数, 必有两个数差为 2。
- 习题 2.5** 设 $n \geq 1$, S 是 $[2n]$ 的 $(n+1)$ -子集。证明: S 中必有两个数, 其中一个能整除另一个。
- 习题 2.6** 在一个边长为 2 的等边三角形中放入 5 个点。证明: 至少存在两个点, 它们之间的距离不超过 1。
- 习题 2.7** 将一个 3 行 9 列的方格表 (共 27 个格子) 中的每个格子染成红色或蓝色。证明: 一定存在两列, 它们的染色方式相同。
- 习题 2.8** 任给 5 个整数 (可以相同), 则必能从中选出三个, 使得它们的和能被 3 整除。
- 习题 2.9** 设 $n \geq 3$ 为正奇数。任给 $(n-1)^2 + 1$ 个整数, 则必能从中选出 n 个数, 使它们的和能被 n 整除。
- 习题 2.10** 若 $n \geq 3$, 则任给 n 个正整数, 其中一定存在两个数, 它们的差或和能被 n 整除。
- 习题 2.11** $[18]$ 中任取 10 个数, 则其中一定存在两个数, 它们的差为 3。
- 习题 2.12** 任取 $n+1$ 个正整数, 则至少有两个数之差能被 n 整除。

§3 分配问题

本章目标

1. 会按小球、盒子是否相同对分配问题分类计数。
2. 会用组合证明处理二项式系数等恒等式。
3. 理解第二类 Stirling 数与整数分拆。

第 1 章从 n 个不同小球中取 k 次。现在反过来：把 k 个小球放进 n 个盒子。小球、盒子可以相同或不同，每盒还可以加限制。先看最简单的情形：球与盒子都不同。

3.1 分配问题：不同小球/不同盒子

我们考虑将 k 个小球放进 n 个盒子。不同小球、不同盒子时，把第 i 号小球所在盒子的编号记在第 i 位，即取自 $[n]$ 的 k -序列，共 n^k 种。这与从 $[k]$ 到 $[n]$ 的函数、有放回有顺序取球是同一计数。

每个盒子至多一个球时，对应取自 $[n]$ 的 k -排列，共 $(n)_k$ 种，也即从 $[k]$ 到 $[n]$ 的单射。当 $k = n$ 时即 $n!$ ，对应双射。

每个盒子至少一球时，对应从 $[k]$ 到 $[n]$ 的满射。满射较难直接计数，先看两个小例子。

例 3.1 从 $[5]$ 到 $[2]$ 的满射有多少？

解 1 令 $\varphi(n, k)$ 表示从 $[n]$ 到 $[k]$ 的满射的个数。从 $[5]$ 到 $[2]$ 的全部函数有 2^5 个；按值域大小分类，先选定值域再作满射，故

$$\binom{2}{1}\varphi(5, 1) + \binom{2}{2}\varphi(5, 2) = 2^5.$$

由此解出 $\varphi(5, 2) = 2^5 - 2 = 30$ 。 □

解 2 令 a_j 表示满足 $|f^{-1}(1)| = j$ 的满射个数，则 $a_j = \binom{5}{j}$ 。从而满射的个数为

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} = 5 + 10 + 10 + 5 = 30.$$

□

从 $[5]$ 到 $[3]$ 的满射有多少？你能算出吗？

3.2 组合证明

组合证明可以给出一些恒等式的漂亮证明。

例 3.2 若 $n, k \geq 1$ ，则

$$(n)_k = (n-1)_k + k \cdot (n-1)_{k-1}.$$

直接通过计算证明当然也不难，但验证过程缺乏乐趣。

证明 我们知道 $(n)_k$ 等于将 k 个不同小球放进 n 个不同的盒子并且每个盒子至多只有一个小球的方法数。我们固定第一个盒子，将情况分为两类：

情况 1：第一个盒子里没有小球，有 $(n-1)_k$ 种方法（此时只需把 k 个小球放进其他 $n-1$ 个盒子中）。

情况 2：第一个盒子里有小球，有 $k \cdot (n-1)_{k-1}$ 种方法（先从 k 个小球中选一个放入第一个盒子，再把其余 $k-1$ 个小球放进剩下的 $n-1$ 个盒子）。

于是，由加法原理得到所求等式。 □

3.3 分配问题：相同小球/不同盒子

小球无编号，宜用集合描述：有球的盒子编号组成集合（每盒至多一球）或多重集合（每盒球数不限）。于是， $\binom{n}{k}$ 既计数取自 $[n]$ 的 k -子集，也计数把 k 个相同小球放入 n 个不同盒子、每盒至多一个的放法； $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$ 既计数 k -多重集合，也计数每盒球数不限的放法。

目前的结果汇总于表 4，问号处将在后文补全。

Table 4: 分配问题的初步汇总					
分配问题		每个盒子的限制			
k 个小球	n 个盒子	无限制	≤ 1	≥ 1	$= 1$
不同	不同	n^k	$(n)_k$	?	$n!$ 或 0
相同	不同	$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$	$\binom{n}{k}$	$\left(\!\!\binom{n}{k-n}\!\!\right)$	1 或 0
不同	相同	?	?	?	?
相同	相同	?	?	?	?

3.4 组合证明（续）

第 1 章已用幂集证明 $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ 。现改用放球：左边是把 n 个不同小球放入 2 个不同盒子的方法数；令 a_k 为第一盒恰有 k 个球的方法数，则 $a_k = \binom{n}{k}$ ，再由加法原理即得。

命题 3.3 (杨辉三角) 给定 $1 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

证明 等号左边表示把 k 个相同小球放进 n 个盒子、每个盒子至多放一个的方法数。我们观察第一个盒子的情况：

第一个盒子没有小球：这时 k 个小球只能放进其余的 $n-1$ 个盒子，因此有 $\binom{n-1}{k}$ 种方法。

第一个盒子有一个小球：这时剩下 $k-1$ 个小球只能放进其余的 $n-1$ 个盒子。因此，我们有 $\binom{n-1}{k-1}$ 种方法。

由加法原理得， $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ 。 □

应用相同的思路，我们可以得到：

命题 3.4 给定 $1 \leq k \leq n$,

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right).$$

证明 等号左边表示 k 个相同小球放进 n 个盒子的方法数（盒子中小球数量无限制）。我们观察第一个盒子的情况：

第一个盒子没有小球：这时 k 个小球只能放进其余的 $n-1$ 个盒子，因此有 $\left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right)$ 种方法。

第一个盒子有至少一个小球：这时剩下的 $k-1$ 个小球仍然可以放进第一个盒子，因此一共仍然有 n 个盒子可以放。因此，我们有 $\left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right)$ 种方法。

由加法原理得， $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right)$ 。 □

注 3.5 如果我们考虑的情况为第一个盒子恰好有 j 个小球，并用 a_j 表示该情况的方法数，则由加法原理知

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = a_0 + a_1 + \cdots + a_k,$$

并且注意到（第一个盒子只能有 j 个小球，剩下的 $k-j$ 个小球放进其余的盒子中）

$$a_j = \left(\binom{n-1}{k-j} \right).$$

因此得到

$$\left(\binom{n}{k} \right) = \left(\binom{n-1}{k} \right) + \left(\binom{n-1}{k-1} \right) + \cdots + \left(\binom{n-1}{1} \right) + \left(\binom{n-1}{0} \right).$$

第 1 章已用补集证明 $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ 。是否可以用小球的模型证明？

组长问题. 小球模型可能比较抽象，现实中我们常常遇到挑选小组，然后在小组内挑选组长的的问题。利用这个具体的实际问题，我们可以证明一些有用的命题。例如，从 n 个人当中选 k 个人组成一个小组，考虑被选中的人和没有被选中的人，可以得到 $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ 。再比如 n 个人中有一人名叫张三，张三被选进小组的情况为 $\binom{n-1}{k-1}$ ，张三不被选进小组的情况为 $\binom{n-1}{k}$ ，因此可以得到 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ 。如果从 n 个人当中选 k 个人之后再挑选组长，则可以得到

命题 3.6 若 $1 \leq k \leq n$,

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

证明 考虑如下问题：从 n 名不同的学生中选 k 人组成小组，并从中选一位组长。一共有多少种方法？

解法一：利用乘法原理得 $\binom{n}{k} \binom{k}{1} = k \binom{n}{k}$ 。

解法二：我们先选小组长，再从剩下的学生中选择 $k-1$ 名作为小组成员。这样可以得到 $\binom{n}{1} \binom{n-1}{k-1} = n \binom{n-1}{k-1}$ 。

因此，我们得到 $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ 。 $\square$

利用组长问题，可以完成习题 3.38 和 3.39 的证明。

3.5 二项式定理

我们或许已经熟知二项式定理：

定理 3.7 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 及 $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

我们先用组合方法给出一个较弱的二项式定理（引理 3.8），再利用多项式的性质得到定理 3.7。

引理 3.8 对任意 $n, x, y \in \mathbb{N}$,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

证明 考虑 n 个不同小球、 x 个不同的蓝色盒子和 y 个不同的白色盒子。对盒子中的小球数不作限制，则将小球放入盒子共有

$$(x+y)^n$$

种结果。令 a_k 表示蓝色盒子中恰有 k 个球的方法数，则由加法原理得到

$$(x+y)^n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

考虑从 n 个球中选出 k 个，并只允许它们进入蓝色盒子；剩下的 $n-k$ 个小球只允许进入白色盒子。可以计算出

$$a_k = \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

因此,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

□

下述命题的证明从略。

命题 3.9 给定实系数多项式 $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ 。如果存在两两不同的 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 使得 $p(x_i) = 0$, 则对任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $p(x) = 0$ 。 □

引理 3.10 若实系数多项式 $p(x, y) = \sum_{0 \leq i, j \leq n} a_{i,j} x^i y^j$ 对任意 $x, y \in \mathbb{N}$ 都满足 $p(x, y) = 0$, 则对任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 都有 $p(x, y) = 0$ 。

证明 固定 $y \in \mathbb{N}$, 将 $p(x, y)$ 视为关于 x 的多项式。由命题 3.9 可知, 对所有 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $p(x, y) = 0$ 。由于 y 的任意性, 对任意 $y \in \mathbb{N}$ 及 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $p(x, y) = 0$ 。

再固定 $x \in \mathbb{R}$, 则对所有 $y \in \mathbb{N}$, 都有 $p(x, y) = 0$ 。因此, 由命题 3.9 可知, 对所有 $y \in \mathbb{R}$, 都有 $p(x, y) = 0$ 。由于 x 的任意性, 最终得到

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad p(x, y) = 0.$$

□

定理 3.7 由引理 3.8 和引理 3.10 得证。 □

问题 3.11 下面四个等式的证明有什么共同点? 当 $m = 1$ 时, 又能想到哪些结论?

$$\begin{aligned} \binom{m+n}{k} &= \sum_{j=0}^k \binom{m}{j} \binom{n}{k-j} \\ \left(\binom{m+n}{k} \right) &= \sum_{j=0}^k \left(\binom{m}{j} \right) \left(\binom{n}{k-j} \right) \\ (m+n)^k &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} m^j n^{k-j} \\ (m+n)_k &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (m)_j (n)_{k-j}. \end{aligned}$$

利用二项式定理和命题 3.6, 不难得到 (练习)

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np,$$

其中 $0 \leq p \leq 1$ 。这个等式表明二项分布 $\text{Bin}(n, p)$ 的期望是 np 。

3.6 分配问题: 不同小球/相同盒子

定义 3.12 集合 A 的一个 k -划分是指一个集合 $Q = \{B_1, \dots, B_k\}$, 其中

- $B_i \subseteq A$;
- $B_i \neq \emptyset$;
- 当 $i \neq j$ 时, $B_i \cap B_j = \emptyset$;
- $A = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$ 。

例如, $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ 是 $[4]$ 的一个 2-划分。为了方便, 本节将该划分简记为 $\{13, 24\}$ 。

定义 3.13 令 $S(n, k)$ 表示 $[n]$ 的 k -划分数, 并定义 $S(0, 0) = 1^1$ 。

对集合 $[n]$ 作一个 k -划分, 可视为将 n 个不同小球放进 k 个相同盒子, 并且每个盒子至少有一个小球。

- 例 3.14**
- $S(4, 0) = 0$;
 - $S(4, 1) = 1$, 因为只有 $\{1234\}$ 这一种可能。
 - $S(4, 2) = 7$, 因为我们有

$$\{1, 234\}, \{2, 134\}, \{3, 124\}, \{4, 123\}, \{12, 34\}, \{13, 24\}, \{14, 23\}.$$

- $S(4, 3) = 6$, 因为

$$\{12, 3, 4\}, \{13, 2, 4\}, \{14, 2, 3\}, \{23, 1, 4\}, \{24, 1, 3\}, \{34, 1, 2\}.$$

实际上, 因为只有一个盒子有 2 个球, 我们只需选出同盒的两个球即可, 即 $\binom{4}{2} = 6$ 。

- $S(4, 4) = 1$;
- $S(4, 5) = 0$ 。

略作推广, 得到:

命题 3.15 当 $n \geq 1$ 时, $S(n, 1) = S(n, n) = 1$ 。

证明 注意到 $[n]$ 的 1-划分只有 $\{[n]\}$ 一种情况, 因此 $S(n, 1) = 1$ 。而 $[n]$ 的 n -划分只有 $\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$ 这一种情况, 因此 $S(n, n) = 1$ 。□

命题 3.16 当 $n \geq 1$ 时, $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$ 。

证明 $n = 1$ 时结论显然。以下设 $n \geq 2$ 。考虑 $[n]$ 的 $(n-1)$ -划分。注意到有且仅有一个部分包含 2 个元素, 其他部分仅有 1 个元素。因此, 我们只需要知道有 2 个元素的部分是哪 2 个元素即可。因此, $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$ 。□

命题 3.17 当 $n \geq 2$ 时, $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$ 。

证明 考虑将 n 个不同小球放进两个相同的盒子 (每个盒子至少一个小球), 按照 1 号球所在盒子的情况进行分类: 用 a_k 表示 1 号球所在盒子中还有 k 个球, 则由加法原理知

$$S(n, 2) = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-2}.$$

注意到

$$a_k = \binom{n-1}{k}.$$

因此

$$S(n, 2) = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{n-1}{n-2} = 2^{n-1} - 1.$$

□

至此, 我们发现, 当 $k = 1, 2, n-1, n$ 时, 总能观察到一些简单的规律, 从而得到计算 $S(n, k)$ 的办法。当 k 取其他值时, 情况会比较复杂, 需要借助组合思想得到一些递推式来帮助计算 $S(n, k)$ 。

命题 3.18 当 $n, k \geq 1$ 时,

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k).$$

证明 $S(n, k)$ 等于将 n 个不同小球放进 k 个相同盒子的方法数。我们固定 1 号小球。若 1 号小球单独在一个盒子里, 则有 $S(n-1, k-1)$ 种方法; 若 1 号小球不单独在一个盒子里, 可以先将其余 $n-1$ 个小球放进 k 个盒子, 再将 1 号球放进这 k 个不同盒子²中的一个。由乘法原理知, 共有 $kS(n-1, k)$ 种结果。

¹这个定义是合理的: 由定义可知, $\emptyset$ 是 $\emptyset$ 的一个 0-划分。

²此时各盒所含小球的编号集合互不相同, 因此对于 1 号球来说, 这 k 个盒子是可区分的。

再由加法原理，我们得到

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k).$$

□

例 3.19 利用递推式以及 $S(n, 1) = S(n, n) = 1$ ，也可以算得

$$S(4, 2) = S(3, 1) + 2S(3, 2) = S(3, 1) + 2(S(2, 1) + 2S(2, 2)) = 1 + 2(1 + 2) = 7.$$

命题 3.20 当 $n \geq 1, k \geq 1$ 时，

$$S(n, k) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} S(n-j-1, k-1).$$

证明 $S(n, k)$ 等于将 n 个不同小球放进 k 个相同盒子的方法数。我们固定 1 号球所在的盒子。考虑 1 号球所在盒子的球的总数。当总数为 $j+1$ 时，我们从其余的 $n-1$ 个球中挑选 j 个球与 1 号球为伴，再将剩余的 $n-j-1$ 个小球放进其余的 $k-1$ 个盒子中。此时一共有 $\binom{n-1}{j} S(n-j-1, k-1)$ 种可能。对 j 求和得到

$$S(n, k) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} S(n-j-1, k-1).$$

□

考虑如何构造一个从 $[5]$ 到 $[3]$ 的满射。可以先对 $[5]$ 作一个 3-划分，例如

$$\{\{1, 3\}, \{2\}, \{4, 5\}\}.$$

然后，从 $[3]$ 中选一个数作为 $f(1)$ 和 $f(3)$ 的值，再从剩下的数中选一个作为 $f(2)$ 的值，最后将仅剩的数作为 $f(4)$ 和 $f(5)$ 的值。由此可知，从 $[5]$ 到 $[3]$ 共有 $S(5, 3) \cdot 3!$ 个满射。不难推广至一般情况：

命题 3.21 从 $[n]$ 到 $[k]$ 的满射一共有 $S(n, k) \cdot k!$ 个。

表 5 汇总了加入第二类 Stirling 数后的结果。注意：定义中写作 $S(n, k)$ ，其中 n 为元素个数、 k 为块数；表中按“ k 个小球、 n 个盒子”排列，因而对应的是 $S(k, n)$ 。

Table 5: 加入第二类 Stirling 数后的分配问题汇总

分配问题		每个盒子的限制			
k 个小球	n 个盒子	无限制	≤ 1	≥ 1	$= 1$
不同	不同	n^k	$(n)_k$	$S(k, n) \cdot n!$	$n!$ 或 0
相同	不同	$\left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right)$	$\binom{n}{k}$	$\left(\begin{smallmatrix} n \\ k-n \end{smallmatrix}\right)$	1 或 0
不同	相同	$\sum_{i=0}^n S(k, i)$	1 或 0	$S(k, n)$	1 或 0
相同	相同	?	?	?	?

定义 3.22 $B(n) = \sum_{k=0}^n S(n, k)$ 为 贝尔 (Bell) 数。

易知， $B(n)$ 是集合 $[n]$ 的划分总数；也等于将 n 个不同小球放进 n 个相同盒子（允许空盒）的方法数。将 n 个不同小球放进 $n+1$ 个相同盒子的方法数仍为 $B(n)$ ，因为多出的空盒不影响分配结果。稍作尝试：

- $B(0) = S(0, 0) = 1$;
- $B(1) = S(1, 0) + S(1, 1) = 0 + 1 = 1$;
- $B(2) = S(2, 0) + S(2, 1) + S(2, 2) = 0 + 1 + 1 = 2$;
- $B(3) = S(3, 0) + S(3, 1) + S(3, 2) + S(3, 3) = 0 + 1 + 3 + 1 = 5$ 。

也可以不借助各个 $S(n, k)$ 来递推计算 $B(n)$ ：

命题 3.23 对 $n \geq 1$, 有

$$B(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} B(j).$$

证明 我们固定 n 号球所在的盒子。将情况按参数 j 进行分类。令 a_j 表示如下分配结果的数量：从 $1, 2, \dots, n-1$ 号球中选择 j 个球，对其进行所有划分，再把剩下的球放进 n 号球所在的盒子里。根据乘法原理，得到

$$a_j = \binom{n-1}{j} B(j).$$

于是根据加法原理得

$$B(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} B(j).$$

□

例 3.24 利用命题 3.23, 有

$$B(3) = \binom{2}{0} B(0) + \binom{2}{1} B(1) + \binom{2}{2} B(2) = 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 5,$$

以及

$$B(4) = \binom{3}{0} B(0) + \binom{3}{1} B(1) + \binom{3}{2} B(2) + \binom{3}{3} B(3) = 1 + 3 + 3 \cdot 2 + 5 = 15.$$

3.7 分配问题：相同小球/相同盒子

将 5 个球放进 3 个盒子，得到 3 个盒子分别装有 1 个球、3 个球、1 个球。此时，可以用多重集合 $\{1, 1, 3\}$ 来表示该结果。如果 3 个盒子分别装有 2 个球、1 个球、2 个球，则该结果可以用 $\{1, 2, 2\}$ 来表示。无论结果如何，多重集合中的数字相加之和为 5。

定义 3.25 自然数 n 的一个 k -分拆 (k -partition) 是一个多重集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ，其中 $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$ ，并且 $a_i \geq 1$ 。

$\{1, 1, 3\}$ 和 $\{1, 2, 2\}$ 都是 5 的 3-分拆。为了方便，也会用下式表示 $\{1, 1, 3\}$ ³：

$$5 = 3 + 1 + 1.$$

例 3.26 试写出 8 的所有 3-分拆。

定义 3.27 给定 $n, k \geq 0$ ，定义 $P(n, k)$ 为 n 的 k -分拆总数，并定义 $P(0, 0) = 1$ ⁴。

由穷举法不难看出 $P(5, 3) = 2$ 。由于规模较小， $P(6, k)$ ($k \geq 0$) 都可以用穷举法算出。通过穷举，可以观察到：

例 3.28

- 若 $n \geq 0$ ，则 $P(n, n) = 1$ ， $P(n, 2) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ，其中 $\lfloor \alpha \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq \alpha\}$ ， $\alpha \in \mathbb{R}$ 。
- 若 $n \geq 1$ ，则 $P(n, 1) = 1$ 。
- 若 $n \geq 2$ ，则 $P(n, n-1) = 1$ 。

定义 3.29 若 $n \geq 0$ ，定义 $P(n)$ 为 n 的所有分拆方法的总数，即

$$P(n) = \sum_{k=0}^n P(n, k).$$

³通常将加数按从大到小的顺序写出，但这不是必须的。

⁴为什么这是合理的定义？

例 3.30 将 n 个相同小球放进 n 个相同盒子，并且不对盒子中小球数量做限制。一共有多少种结果？不难发现，结果数恰为 $P(n)$ 。从另一方面，我们也可以令 a_k 表示恰好有 k 个盒子有球，则

$$a_k = P(n, k).$$

由加法原理知，结果数为

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^n P(n, k) = P(n).$$

将 n 个小球放进 $n+1$ 个盒子，并且对盒子中小球数不做限制，结果仍然为 $P(n)$ 。这是因为多出的空盒不影响分配结果，或者说 $P(n, n+1) = 0$ 。

命题 3.31 若 $n \geq k \geq 1$ ，则

$$P(n, k) = P(n-1, k-1) + P(n-k, k).$$

证明 将 n 个相同小球放进 k 个相同盒子（不允许空盒子）的方法数为 $P(n, k)$ 。另一方面，我们可以将结果分成两种情况：

情况 1：存在一个大小为 1 的部分。去掉其中一个 1，剩下的是 $n-1$ 的一个 $(k-1)$ -分拆，因此共有 $P(n-1, k-1)$ 种方法。

情况 2：所有盒子都至少有 2 个小球。此时，可以先给每个盒子放入一个小球（只有一种结果），再将剩下的 $n-k$ 个小球放入盒子，并要求每个盒子至少再得到一个球。共有

$$P(n-k, k)$$

种方法。

由加法原理得证。 $\square$

例 3.32 例如，由命题 3.31，

$$P(7, 3) = P(6, 2) + P(4, 3) = \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor + P(4, 3) = 3 + 1 = 4.$$

（约定：当 $m < 0$ 时 $P(m, \cdot) = 0$ ；当 $k > n \geq 0$ 时通常也有 $P(n, k) = 0$ 。）

命题 3.33 若 $n \geq k \geq 1$ ，则

$$P(n, k) = \sum_{j=0}^k P(n-k, j).$$

证明 将 n 个相同小球放进 k 个相同盒子（不允许空盒子）的方法数为 $P(n, k)$ 。另一方面，我们可以先给每个盒子放入一个小球，再将剩下的 $n-k$ 个小球放入盒子（此时不要求盒子再获得一个小球）。我们令 a_j 表示恰有 j 个盒子再次获得小球的分法数，则

$$a_j = P(n-k, j).$$

由加法原理得

$$P(n, k) = P(n-k, 0) + P(n-k, 1) + \cdots + P(n-k, k) = \sum_{j=0}^k P(n-k, j).$$

$\square$

例 3.34 应用命题 3.33，得到

$$P(2023, 2020) = P(3, 1) + P(3, 2) + P(3, 3) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

不要机械地把 $n = 2023$ 和 $k = 2020$ 代入公式逐项计算。

至此，分配问题的结果汇总于表 6。

Table 6: 分配问题的完整汇总

分配问题		每个盒子的限制			
k 个小球	n 个盒子	无限制	≤ 1	≥ 1	$= 1$
不同	不同	n^k	$(n)_k$	$S(k, n) \cdot n!$	$n!$ 或 0
相同	不同	$\left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right)$	$\binom{n}{k}$	$\left(\begin{smallmatrix} n \\ k-n \end{smallmatrix}\right)$	1 或 0
不同	相同	$\sum_{i=0}^n S(k, i)$	1 或 0	$S(k, n)$	1 或 0
相同	相同	$\sum_{i=0}^n P(k, i)$	1 或 0	$P(k, n)$	1 或 0

3.8 多项式

定义 3.35 我们用

$$\binom{n}{t_1, t_2, \dots, t_k}$$

表示将 n 个不同小球分给 k 个盒子，其中第 i 个盒子里有 t_i 个小球的方法数；这里 $t_i \geq 0$ ，且 $\sum_{i=1}^k t_i = n$ 。

这样的分法有多少种？可以先为第 1 个盒子选 t_1 个球，再为第 2 个盒子从剩下的小球中选 t_2 个，以此类推，直到把仅剩的 t_k 个小球放入第 k 个盒子。由乘法原理知，

$$\begin{aligned} \binom{n}{t_1, t_2, \dots, t_k} &= \binom{n}{t_1} \binom{n-t_1}{t_2} \binom{n-t_1-t_2}{t_3} \cdots \binom{n-t_1-\cdots-t_{k-1}}{t_k} \\ &= \frac{n!}{t_1! t_2! \cdots t_k!}. \end{aligned}$$

例 3.36 将 12 本不同的书分给 3 个小朋友，每个小朋友拿 4 本书。一共有多少种分法？

例 3.37 我们有红、黄、蓝、白 4 种颜色的衣服，每种颜色各 5 件，且同色衣服不加区分。将它们分给 20 个小朋友，每个小朋友拿一件，一共有多少种分法？

命题 3.38 当 $n, k \geq 1$ 时，

$$k^n = \sum_{t_1+t_2+\cdots+t_k=n, t_i \geq 0} \binom{n}{t_1, t_2, \dots, t_k}.$$

证明 等式左边表示将 n 个不同小球放进 k 个不同盒子的方法数。我们将结果按每个盒子里小球的个数分类：令 $a_{t_1, t_2, \dots, t_k}$ 表示对每个 i ，第 i 个盒子恰有 t_i 个小球的方法数。则 $t_1 + t_2 + \cdots + t_k = n$ ，并且

$$a_{t_1, t_2, \dots, t_k} = \binom{n}{t_1, t_2, \dots, t_k}.$$

由加法原理，得

$$k^n = \sum_{t_1+t_2+\cdots+t_k=n, t_i \geq 0} a_{t_1, t_2, \dots, t_k} = \sum_{t_1+t_2+\cdots+t_k=n, t_i \geq 0} \binom{n}{t_1, t_2, \dots, t_k}.$$

□

注 3.39 该等式右侧求和式中一共有 $\left(\begin{smallmatrix} k \\ n \end{smallmatrix}\right)$ 项。

实际上，上述命题是多项式定理的一个推论：

定理 3.40 当 $n, k \geq 1$ 且 $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ 时，有

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{t_1+t_2+\cdots+t_k=n, t_i \geq 0} \binom{n}{t_1, t_2, \dots, t_k} x_1^{t_1} x_2^{t_2} \cdots x_k^{t_k}.$$

证明 只需证明该等式对任意 $x_i \in \mathbb{N}$ 成立即可 (与定理 3.7 类似)。考虑 k 种颜色的盒子, 其中第 i 种颜色的盒子有 x_i 个。等式左边表示将 n 个不同小球放进所有盒子的方法数。用 $a_{t_1, t_2, \dots, t_k}$ 表示对每个 i , 第 i 种颜色的所有盒子中共有 t_i 个小球的方法数。由乘法原理得

$$a_{t_1, t_2, \dots, t_k} = \binom{n}{t_1, t_2, \dots, t_k} x_1^{t_1} x_2^{t_2} \cdots x_k^{t_k}.$$

注意到, $t_1 + t_2 + \cdots + t_k = n$, $t_i \geq 0$ 的每一组解都对应一种分类情况。因此, 由加法原理得

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n &= \sum_{t_1 + t_2 + \cdots + t_k = n, t_i \geq 0} a_{t_1, t_2, \dots, t_k} \\ &= \sum_{t_1 + t_2 + \cdots + t_k = n, t_i \geq 0} \binom{n}{t_1, t_2, \dots, t_k} x_1^{t_1} x_2^{t_2} \cdots x_k^{t_k}. \end{aligned}$$

□

例 3.41

$$\begin{aligned} (x + y + z)^2 &= \binom{2}{2, 0, 0} x^2 + \binom{2}{0, 2, 0} y^2 + \binom{2}{0, 0, 2} z^2 \\ &\quad + \binom{2}{0, 1, 1} yz + \binom{2}{1, 0, 1} xz + \binom{2}{1, 1, 0} xy \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 2xz + 2xy. \end{aligned}$$

右侧求和项数为 $\binom{3}{2} = \binom{4}{2} = 6$ 。

例 3.42 $(x + y + z + a + b)^{2023}$ 中 $x^{2000} z^{20} a^1 b^2$ 系数为 $\binom{2023}{2000, 0, 20, 1, 2}$ 。

注意到, 可以将命题 3.3 重新写作

$$\binom{n}{k, n-k} = \binom{n-1}{k-1, n-k} + \binom{n-1}{k, n-k-1},$$

并赋予其合理的组合含义。模仿该思路, 我们可以得到:

命题 3.43 若 $t_1, t_2, \dots, t_k \geq 1$ 并且 $t_1 + t_2 + \cdots + t_k = n$, 则

$$\binom{n}{t_1, t_2, \dots, t_k} = \binom{n-1}{t_1-1, t_2, \dots, t_k} + \binom{n-1}{t_1, t_2-1, \dots, t_k} + \cdots + \binom{n-1}{t_1, t_2, \dots, t_k-1}.$$

3.9 习题

习题 3.1 有多少单射 $f: [5] \rightarrow [9]$ 满足 $\text{ran } f$ 中最大元素是 7?

习题 3.2 如果 f 是一个函数且 $f(i) = i$, 我们称 i 是 f 的一个不动点。

1. 有多少函数 $f: [5] \rightarrow [5]$ 至少包含一个不动点?
2. 有多少函数 $f: [n] \rightarrow [n]$ 没有不动点?
3. 有多少双射 $f: [4] \rightarrow [4]$ 没有不动点?

习题 3.3 有多少从 $[6]$ 到 $[3]$ 的满射?

习题 3.4 $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{k-1}{k-1}$ 等于什么? 请验证。

习题 3.5 有多少从 $[10]$ 到 $[9]$ 的满射?

习题 3.6 从 $[8]$ 到 $[5]$ 有多少满射? 求出具体数值。

习题 3.7 利用 $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$ 证明

$$S(n, k) = S(n-2, k-2) + (2k-1)S(n-2, k-1) + k^2 S(n-2, k),$$

再给出一个组合证明。

习题 3.8 按下列要求, 将 40 颗糖果分给 10 个孩子或装入 10 个袋子 (不用计算出具体数字):

- 糖果不同, 每个孩子至少拿一个。
- 糖果相同, 每个孩子可以拿任意数量。
- 糖果不同, 袋子相同。
- 糖果相同, 袋子相同并且每个袋子至少一颗糖。
- 糖果不同, 每个孩子恰好拿一颗 (有多余糖果)。
- 糖果不同, 张三恰好拿到 4 颗糖。

习题 3.9 在什么条件下有 $P(n, k) = P(n-1, k-1)$?

习题 3.10 一副扑克牌 52 张, 发给 4 个人, 一人 13 张。一共有多少种发牌结果? 答案保留组合数。

- 习题 3.11**
- $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^7$ 展开式中 $x_1^2 x_3 x_4^3 x_5$ 的系数是多少?
 - $(2x_1 - 3x_2 + 5x_3)^6$ 展开式中 $x_1^3 x_2 x_3^2$ 的系数是多少?

习题 3.12 将 $(x + y + z)^3$ 展开。

习题 3.13 满足 $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 20$ 并且 $z_i \geq i$ 的整数解一共有多少组?

习题 3.14 有多少组整数解 $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$ 满足 $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 30$, 并且 $z_1 \geq 8, z_2 \geq 3, z_3 \geq 6, z_4 \geq 5, z_5 \geq 0$?

习题 3.15 从 [7] 到 [4] 的函数中有多少满射?

习题 3.16 把 7 颗不同糖果放进 4 个相同的袋子中 (袋子中可以没有糖果), 一共有多少种方法?

习题 3.17 将 5 个不同的糖果放进 10 个相同的袋子中 (允许空袋子), 一共有多少种方法?

习题 3.18 试用组合法证明 $P(n, k) = P(n-1, k-1) + P(n-k, k)$, 并计算 $P(20, 3)$ 。

习题 3.19 令 $Q(n, k)$ 表示将 n 写成 k 个不同加数之和的方法数。例如, $Q(6, 2) = 2, Q(6, 3) = 1$ 。

- 证明 $Q(n, k) = Q(n-k, k-1) + Q(n-k, k)$ 。
- 计算 $Q(15, 3)$ 。

习题 3.20 试用组合法证明平方和公式, 即 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 提示 1: $\sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=1}^n k(k-1) + \sum_{k=1}^n k$ 。

提示 2: 证明 $\sum_{k=1}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$ 。

习题 3.21 若 $n \geq 1$, 则 $n! = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} j(j!)$ 。

习题 3.22 若 $m, n \geq 1$, 试用组合法证明 $\sum_{j=1}^{\min\{m,n\}} \binom{m}{j} \binom{j}{n-j} = \binom{m}{n}$ 。

习题 3.23 若 $n \geq 3, 1 \leq k \leq n$, 试用组合法证明 $\binom{n}{k} - \binom{n-3}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1}$ 。

习题 3.24 若 $m > k \geq 1, n \geq 0$, 试用组合法证明 $\sum_{j=0}^n \binom{k}{j} \binom{m-k}{n-j} = \binom{m}{n}$ 。

- 习题 3.25**
- 若 $m \geq n \geq k \geq 0$, 用组合法证明 $\binom{m}{n} \binom{n}{k} = \binom{m}{k} \binom{m-k}{n-k}$;
 - 若 $m \geq n \geq 0$, 证明 $\binom{m}{0} \binom{m}{n} + \binom{m}{1} \binom{m-1}{n-1} + \cdots + \binom{m}{n} \binom{m-n}{0} = 2^n \binom{m}{n}$ 。

习题 3.26 若 $m > k \geq 1$, 证明 $\sum_{n=k}^m (-1)^n \binom{m}{n} \binom{n}{k} = 0$ 。

习题 3.27 若 $n \geq 0$, 证明 $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$ 。

习题 3.28 若 $m, n \geq 0$, 试用组合法证明: $\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$ 。

习题 3.29 试用组合法证明: $\sum_{j \geq 0} \binom{n}{j} \binom{m}{k+j} = \binom{n+m}{n+k}$ 。

习题 3.30 若 $n > m \geq 1, r \geq 0$, 试用组合法证明: $\sum_{k=m}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1} - \binom{m}{r+1}$ 。

习题 3.31 若 $m, \ell \geq 0$ 且 $m + \ell \leq n$, 试用组合法证明 $\sum_{k=0}^n \binom{k}{m} \binom{n-k}{\ell} = \binom{n+1}{m+\ell+1}$ 。

习题 3.32 若 $n \geq 0$, 试用组合方法证明 $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ 。

习题 3.33 若 $n \geq 1$, 试用组合方法证明 $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = 6\binom{n+3}{4}$ 。

习题 3.34 若 $n \geq 1, r \geq 0$, 则 $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)\cdots(k+r) = (r+1)! \cdot \binom{n+1+r}{r+2}$

习题 3.35 若 $n \geq m$, 则 $\sum_{k=0}^m \binom{n-k}{m-k} = \binom{n+1}{m}$

习题 3.36 若 $n \geq 1$, 试用组合方法证明 $\binom{n}{0}\binom{n}{1} + \binom{n}{1}\binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1}\binom{n}{n} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$ 。

习题 3.37 1. 若 $n \geq k \geq 2$, 试用组合方法证明 $k^2\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} + n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$;
2. 若 $n \geq 1$, 证明 $n(n+1)2^{n-2} = \sum_{k=1}^n k^2\binom{n}{k}$ 。

习题 3.38 试用组合方法证明 $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ 。

习题 3.39 试用组合方法直接证明 $\sum_{k=1}^n k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$ 。

习题 3.40 $(x+y+2z)^5$ 展开式中 xy^2z^2 的系数是多少?

习题 3.41 $(3x+2y+z)^6$ 的展开式中 x^3yz^2 的系数是多少?

习题 3.42 将 17 写成 3 个加数之和, 一共有多少种方法? (请计算出具体数值。)

习题 3.43 多项式 $(x^2 + \frac{1}{x})^6$ 的展开式中的常数项是多少?

习题 3.44 将 2032 写成 2025 个加数的和, 一共有多少种方法? (通过穷举得到答案不得分。)

习题 3.45 将 6 颗不同糖果装进 5 个相同袋子中 (允许空袋子), 一共有多少种方法?

习题 3.46 将 8 个不同糖果分装到两个相同塑料袋中 (每个袋中至少有 1 颗糖果), 一共有多少种方法?

习题 3.47 $(2x+3y)^5$ 展开式中 x^3y^2 的系数是多少?

§4 容斥原理

本章目标

1. 会用 $N_{\geq}, N_{=}$ 表述计数问题。
2. 掌握容斥原理, 并用于计数。

第 3 章计算满射时, 已经用过“全部函数减去不满射”这类想法。本章把它写成一般方法。

我们经常会考虑不满足某些性质的数学对象有多少个。

[100] 中有多少个数既不是 2 的倍数, 也不是 3 的倍数? 令 $A_i = \{n \in [100] \mid i \mid n\}$ 。易知

$$|A_2| = 50, |A_3| = 33, |A_2 \cap A_3| = 16.$$

所以

$$|A_2 \cup A_3| = |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3| = 50 + 33 - 16 = 67.$$

因此, 一共有 $100 - 67 = 33$ 个数既不是 2 的倍数, 也不是 3 的倍数。如果情况更复杂, 我们可能无法依赖这样简单的观察来计算了。为了讨论更复杂的情况, 我们需要做一些准备工作。

首先考虑 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ 的证明。我们往往会依赖直觉作如下论述: 任取一个元素 $x \in \mathcal{U}$ 。

- 若 $x \notin A \cup B$, 则 x 对等式左边的贡献为 0, 对右边的贡献为 $0 + 0 - 0 = 0$;
- 若 $x \in A \setminus B$, 则 x 对等式左边的贡献为 1, 对右边的贡献为 $1 + 0 - 0 = 1$;
- 若 $x \in A \cap B$, 则 x 对等式左边的贡献为 1, 对右边的贡献为 $1 + 1 - 1 = 1$;

- 若 $x \in B \setminus A$, 则 x 对等式左边的贡献为 1, 对右边的贡献为 $0 + 1 - 0 = 1$ 。

据此便可说明等式成立。不过, “贡献为 k ” 的含义究竟是什么呢?

定义 4.1 若 $A \subseteq \mathcal{U}$, 则 A 的特征函数为

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}.$$

命题 4.2 若 $A \subseteq \mathcal{U}$, 则

$$|A| = \sum_{x \in A} 1 = \sum_{x \in \mathcal{U}} \chi_A(x).$$

□

定义 4.3 若 $A \subseteq \mathcal{U}$, $x \in \mathcal{U}$, 则称 x 对 $|A|$ 的贡献为 $\chi_A(x)$ 。

本节一开始的讨论实质上证明了: 对任意 $x \in \mathcal{U}$, 都有

$$\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x).$$

两边对 $x \in \mathcal{U}$ 求和, 我们就得到

$$|A \cup B| = \sum_{x \in \mathcal{U}} \chi_{A \cup B}(x) = \sum_{x \in \mathcal{U}} \chi_A(x) + \sum_{x \in \mathcal{U}} \chi_B(x) - \sum_{x \in \mathcal{U}} \chi_{A \cap B}(x) = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

4.1 容斥原理

令 $\mathcal{U}$ 表示所考虑的所有对象的集合。对于 $x \in \mathcal{U}$, 我们用 $P(x)$ 表示 x 满足性质 P , 用 $\neg P(x)$ 表示 x 不满足性质 P 。例如, 用 $P(n)$ 表示 $2 \mid n$, 则 $\neg P(n)$ 表示 n 为奇数。

例 4.4 令 $\mathcal{U}$ 表示所有从 A 到 B 的函数, 定义 $\text{surj}(f)$ 为

$$\forall b \in B (b \in \text{ran}(f)),$$

则 $\text{surj}(f)$ 表示 f 是满射。如果定义 $P_b(f)$ 为

$$b \notin \text{ran}(f),$$

则 $\neg P_b(f)$ 表示 $b \in \text{ran}(f)$ 。如果对任意 $b \in B$, f 都不满足 P_b , 则 f 是一个满射。

例 4.5 令 $\mathcal{U} = [100]$, 用 $P_i(n)$ 表示 $i \mid n$ 。则 $\mathcal{U}$ 中有 33 个数既不满足 P_2 也不满足 P_3 。

定义 4.6 令有穷集合 $\mathcal{U}$ 为所考虑对象的全体, 有穷集合 $\mathcal{P}$ 为所考虑性质的全体, 并取 $J \subseteq \mathcal{P}$ 。我们定义

- $N_{\geq}(J)$ 为满足 J 中所有性质的元素的总数;
- $N_{=}(J)$ 为恰好满足 J 中这些性质的元素⁵的总数。

例 4.7 若 $\mathcal{U} = [100]$, $\mathcal{P} = \{P_2, P_3\}$, 则 6 满足 $\{P_2\}$ 中的所有性质, 但并非恰好满足 $\{P_2\}$ 中的性质, 因为 6 还满足 P_3 。8 恰好满足 $\{P_2\}$ 中的性质, 因为 8 满足 P_2 但不满足 P_3 。

- $N_{\geq}(\emptyset) = |\mathcal{U}| = 100$;
- $N_{\geq}(\{P_2\}) = 50$;
- $N_{\geq}(\{P_3\}) = 33$;
- $N_{\geq}(\{P_2, P_3\}) = 16$;
- $N_{=}(\{P_2, P_3\}) = 16$;
- $N_{=}(\{P_2\}) = N_{\geq}(\{P_2\}) - N_{\geq}(\{P_2, P_3\}) = 34$;
- $N_{=}(\{P_3\}) = N_{\geq}(\{P_3\}) - N_{\geq}(\{P_2, P_3\}) = 17$;
- $N_{=}(\emptyset) = N_{\geq}(\emptyset) - N_{\geq}(\{P_2\}) - N_{\geq}(\{P_3\}) + N_{\geq}(\{P_2, P_3\}) = 33$ 。

⁵即, 该元素满足 J 中所有性质, 但不满足 $\mathcal{P} \setminus J$ 中的任何性质。

其中, $N_=(J)$ 的计算可由 Venn 图得到。

在计算过程中可以发现, $N_{\geq}(J)$ 较容易计算, 而 $N_=(J)$ 一般要困难许多; 只有 $N_=(\mathcal{P}) = N_{\geq}(\mathcal{P})$ 比较容易。容斥原理给出了 $N_=(J)$ 的计算公式。

定理 4.8 (容斥原理基本形式) 令有穷集合 $\mathcal{U}$ 为所考虑对象的全体, 有穷集合 $\mathcal{P}$ 为所考虑的性质全体。

$$N_=(\emptyset) = \sum_{J: J \subseteq \mathcal{P}} (-1)^{|J|} N_{\geq}(J).$$

定理 4.9 (容斥原理一般形式) 令有穷集合 $\mathcal{U}$ 为所考虑对象的全体, 有穷集合 $\mathcal{P}$ 为所考虑的性质全体。固定 $S \subseteq \mathcal{P}$, 则

$$N_=(S) = \sum_{J: S \subseteq J \subseteq \mathcal{P}} (-1)^{|J|-|S|} N_{\geq}(J).$$

基本形式的一个直接应用见习题 4.1。

定理 4.8 设 $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ 。先将等式右边展开:

$$\sum_{J: J \subseteq \mathcal{P}} (-1)^{|J|} N_{\geq}(J) = N_{\geq}(\emptyset) - \sum_{|J|=1} N_{\geq}(J) + \sum_{|J|=2} N_{\geq}(J) - \sum_{|J|=3} N_{\geq}(J) + \dots + (-1)^n N_{\geq}(\mathcal{P}).$$

固定任意 $x \in \mathcal{U}$, 设 x 恰好只满足 $\mathcal{P}$ 中的 m 个性质。

若 $m = 0$, 则 x 对 $N_=(\emptyset)$ 的贡献为 1。对 $N_{\geq}(\emptyset)$ 的贡献为 1, 若 $\emptyset \neq J \subseteq \mathcal{P}$, 则 x 对 $N_{\geq}(J)$ 的贡献为 0。此时, x 对等式左右两边的贡献都为 1。

若 $m \geq 1$, 不妨设 x 恰好只满足 $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ 中的性质。对 $N_=(\emptyset)$ 的贡献为 0, 对 $N_{\geq}(\emptyset)$ 的贡献为 1。若 $|J| = j$, 则由等式

$$\sum_{|J|=j} N_{\geq}(J) = \sum_{|J|=j, J \subseteq \{P_1, \dots, P_m\}} N_{\geq}(J) + \sum_{|J|=j, J \not\subseteq \{P_1, \dots, P_m\}} N_{\geq}(J),$$

可以看出, x 对 $\sum_{|J|=j} N_{\geq}(J)$ 的贡献为 $\binom{m}{j} \cdot 1 + 0 = \binom{m}{j}$ 。因此, x 对 $\sum_{J: J \subseteq \mathcal{P}} (-1)^{|J|} N_{\geq}(J)$ 的贡献为

$$\binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} = (1-1)^m = 0.$$

因此, x 对等式左右两边的贡献都为 0。

综上, 容斥原理的基本形式得证。 $\square$

定理 4.9 的证明见习题 4.2。

容斥原理也常常被叙述为:

推论 4.10 若 $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \mathcal{U}$, 则

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_i |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

证明 我们只需定义性质 $P_i(x)$ 为 $x \in A_i$, 观察到

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = N_{\geq}(\emptyset) - N_=(\emptyset),$$

再应用定理 4.8 即可。 $\square$

例 4.11 注意到 $1386 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$ 。[1386] 中有多少个数不能被 2, 3, 7 中任何一个整除? 我们令 $\mathcal{U} = [1386]$, $P_i(n)$ 为 $i \mid n$, $\mathcal{P} = \{P_2, P_3, P_7\}$ 。则

- $N_{\geq}(\emptyset) = 1386$;
- $N_{\geq}(\{P_2\}) = 693$;
- $N_{\geq}(\{P_3\}) = 462$;

- $N_{\geq}(\{P_7\}) = 198$;
- $N_{\geq}(\{P_2, P_3\}) = 231$;
- $N_{\geq}(\{P_2, P_7\}) = 99$;
- $N_{\geq}(\{P_3, P_7\}) = 66$;
- $N_{\geq}(\{P_2, P_3, P_7\}) = 33$ 。

由容斥原理得

$$\begin{aligned} N_{=}(\emptyset) &= \sum_{J \subseteq \mathcal{P}} (-1)^{|J|} N_{\geq}(J) \\ &= 1386 - 693 - 462 - 198 + 231 + 99 + 66 - 33 = 396. \end{aligned}$$

例 4.12 考虑长度为 4 的密码，每一位选自数字 $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ 。其中有多少个密码的相邻数字各不相同？

令 $\mathcal{U}$ 表示所有密码（不加限制），则 $|\mathcal{U}| = 10^4$ 。令 P_i 表示第 i 位和第 $i+1$ 位相同。 $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3\}$ 。

- $a_0 = N_{\geq}(\emptyset) = |\mathcal{U}| = 10^4$;
- $a_1 = N_{\geq}(\{P_i\}) = 10^3$ ，其中 $i \in [3]$;
- $a_2 = N_{\geq}(\{P_i, P_j\}) = 10^2$ ，其中 $i < j$;
- $a_3 = N_{\geq}(\{P_1, P_2, P_3\}) = 10$ 。

由容斥原理得

$$\begin{aligned} N_{=}(\emptyset) &= \sum_{J \subseteq \mathcal{P}} (-1)^{|J|} N_{\geq}(J) \\ &= \sum_{j=0}^3 \sum_{|J|=j, J \subseteq \mathcal{P}} (-1)^j N_{\geq}(J) \\ &= \sum_{j=0}^3 (-1)^j \binom{3}{j} a_j \\ &= a_0 - \binom{3}{1} a_1 + \binom{3}{2} a_2 - \binom{3}{3} a_3 \\ &= 10^4 - 3 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 - 10 = 7290. \end{aligned}$$

注 4.13 例 4.12 中的 $N_{\geq}(J)$ 只依赖于 $|J|$ ，而不依赖于 J 的具体取值；例 4.11 中的 $N_{\geq}(J)$ 则依赖于 J ，计算量稍大。是否有更直接的方式得到例 4.12 的答案？

定义 4.14 若 $n \geq 1$ ，考虑函数 $f: [n] \rightarrow [n]$ 。我们称 i 为 f 的不动点，如果 $f(i) = i$ 。我们通常定义 D_n 为

$$D_n = \{f: [n] \rightarrow [n] \mid f \text{ 是一个没有不动点的双射}\}.$$

例 4.15 若 $n \geq 1$ ， D_n 等于多少？我们令 $\mathcal{U}$ 表示 $[n] \rightarrow [n]$ 的所有双射。令 $P_i(f)$ 表示 $f(i) = i$ ， $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ ， $J \subseteq \mathcal{P}$ 。若 $|J| = j$ ，则

$$N_{\geq}(J) = (n-j)!.$$

由容斥原理得

$$\begin{aligned} N_{=}(\emptyset) &= \sum_{J \subseteq \mathcal{P}} (-1)^{|J|} N_{\geq}(J) \\ &= n! - \binom{n}{1} (n-1)! + \binom{n}{2} (n-2)! - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} (n-n)! \\ &= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right). \end{aligned}$$

注 4.16 我们知道

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n.$$

因此, 对于比较大的 n , 我们可以近似估计

$$D_n \approx \frac{n!}{e}.$$

例 4.17 考虑从 $[n]$ 到 $[n]$ 的函数。其中有多少个函数没有不动点? 令 $\mathcal{U}$ 为所有 $[n] \rightarrow [n]$ 的函数, $P_i(f)$ 表示 $f(i) = i$ 。若 $|J| = j$, 则 $N_{\geq}(J) = n^{n-j}$ 。由容斥原理得

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} n^{n-j}.$$

例 4.18 我们已经知道从 $[n]$ 到 $[k]$ 一共有 $S(n, k) \cdot k!$ 个满射。下面我们利用容斥原理来计算。令 $\mathcal{U}$ 为所有从 $[n]$ 到 $[k]$ 的函数。令 $P_i(f)$ 表示 $i \notin \text{ran}(f)$ 。 $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$ 。若 $J \subseteq \mathcal{P}$, $|J| = j$, 则

$$N_{\geq}(J) = (k - j)^n.$$

由容斥原理知

$$\begin{aligned} N_{=}(\emptyset) &= \sum_{J \subseteq \mathcal{P}} (-1)^{|J|} N_{\geq}(J) \\ &= k^n - \binom{k}{1} (k-1)^n + \binom{k}{2} (k-2)^n - \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} 1^n + (-1)^k 0^n \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j (k-j)^n. \end{aligned}$$

由这个例子, 还得到下面的等式:

命题 4.19 若 $n, k \geq 1$, 则

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j (k-j)^n.$$

4.2 习题

习题 4.1 应用容斥原理重新计算例 4.7。

习题 4.2 证明定理 4.9。

习题 4.3 将 20 个相同的小球放进 10 个不同的盒子, 并且每个盒子最多有 5 个小球。一共有多少种方法? 如果每个盒子至少有 1 个、至多有 5 个呢?

习题 4.4 从 $[6]$ 到 $[7]$ 的函数中, 有多少函数满足对所有 $i \in [7]$, $|f^{-1}(i)| \leq 2$?

习题 4.5 已知 $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, 求 $[630]$ 中有多少个数不能被 3、5、7 中任何一个整除?

习题 4.6 掷 5 枚颜色不同的骰子, 有多少种结果的点数之和为 18?

习题 4.7 将 6 个不同的小球分给 7 个孩子, 每个孩子最多允许拿 2 个小球, 一共有多少种分法?

习题 4.8 有多少个非负整数解 (x_1, x_2, x_3) 满足 $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, 且 $x_1 \neq 1$ 、 $x_2 \neq 2$ 、 $x_3 \neq 3$?

习题 4.9 已知 $1925 = 5^2 \cdot 7 \cdot 11$, 在 $[1925]$ 中有多少个数与 1925 互素?

习题 4.10 考虑双射 $f: [5] \rightarrow [5]$ 。如果存在 $i \in [4]$ 使得 $f(i+1) = f(i) + 1$, 则称 f 是“好的”。有多少个双射不是“好的”? (例如, 31254 是“好的”, 32154 不是“好的”。)

习题 4.11 若 $n \geq m \geq 1$, 借助容斥原理证明 $\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \left(\binom{m-k}{n} \right) = \binom{n-1}{m-1}$ 。

习题 4.12 教室里有 4 列、5 排, 共 20 把椅子。安排 8 个人就座, 要求第一排所有座位都有人, 且每列中间不允许出现空位 (例如, 同一列中不能第一、三排有人而第二排无人)。一共有多少种方法?

§5 生成函数

本章目标

1. 会写出普通生成函数并读取系数。
2. 会用生成函数处理递推。
3. 了解指数型生成函数，以及 $S(n, k)$ 、 $P(n)$ 的生成函数。

第3章用递推计算分拆数 $P(n, k)$ 。若加数限定为 1, 2, 3，仍可递推，但生成函数能一次给出所有项。先看这个特例。

5.1 引言

问题 5.1 将 n 写成若干个 1, 2, 3 之和（不计加数的次序，即按分拆计数），一共有多少种方法？

将答案记为 a_n 。当 n 较小时，很容易通过穷举得到答案。例如， $n = 6$ 时，所有分拆见表 7。由此，不难得到 $a_6 = 7$ 。见习题 5.1。不过，穷举法很难用来求 a_{100} 这样

Table 7: 由 1, 2, 3 构成的 6 的分拆

3 + 3	3 + 2 + 1	3 + 1 + 1 + 1
2 + 2 + 2	2 + 2 + 1 + 1	2 + 1 + 1 + 1 + 1
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1		

的数。我们继续以 $n = 6$ 为例，用 S_0 表示所有符合要求的分拆方法的集合，则 S_0 和

$$S_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 \mid a + 2b + 3c = 6\}$$

等势。 S_1 又与

$$S_2 = \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_1 + z_2 + z_3 = 6, z_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, z_2 \in \{0, 2, 4, 6\}, z_3 \in \{0, 3, 6\}\}$$

等势。写法上略作调整， S_2 又与

$$S_3 = \{(z_1, z_2, z_3) \mid x^{z_1} x^{z_2} x^{z_3} = x^6, z_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, z_2 \in \{0, 2, 4, 6\}, z_3 \in \{0, 3, 6\}\}$$

等势。此时，我们注意到多项式

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(1 + x^2 + x^4 + x^6)(1 + x^3 + x^6)$$

的展开式中 x^6 的系数即为 $|S_3| = a_6$ （为什么？）。该多项式的展开式如下（不推荐手算）：

$$f(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 7x^6 + 7x^7 + 8x^8 + 8x^9 + 8x^{10} + 7x^{11} + 7x^{12} + 5x^{13} + 4x^{14} + 3x^{15} + 2x^{16} + x^{17} + x^{18}.$$

x^{19} 的系数为 0，显然不等于 a_{19} ；那么 x^8 的系数等于 a_8 吗？ x^4 的系数等于 a_4 吗？事实上，如果令

$$T_k = \{(z_1, z_2, z_3) \mid x^{z_1} x^{z_2} x^{z_3} = x^k, z_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, z_2 \in \{0, 2, 4, 6\}, z_3 \in \{0, 3, 6\}\},$$

则 $f(x)$ 中 x^k 的系数为 $|T_k|$ 。由于不允许 z_1 取 8，因此 $|T_8| \neq a_8$ 。但这些取值限制不影响 a_4 ，因此 $|T_4| = a_4$ 。形式上，如果想找到一个表达式，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$ ， x^n 的系数恰好等于 a_n ，可以考虑

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)$$

的展开式。

5.2 生成函数

定义 5.2 序列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的生成函数 (generating function) 为形式幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

这里的“形式”是指暂时不管级数是否收敛，只把 $\sum a_n x^n$ 当作记录序列的一种写法。

例 5.3

- $1, 0, 0, 0, 0, \dots$ 的生成函数为 1;
- $0, 1, 0, 0, 0, \dots$ 的生成函数为 x ;
- $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$ 的生成函数为 $1 + x^2 + x^4 + \dots$ 。

这些例子平平无奇：我们没有因为引入生成函数的概念得到任何额外信息，因为我们一开始便知道这个序列的所有信息。

例 5.4 令 b_n 表示将 n 写成若干个 1, 2, 3 的和，并且其中 1 最多有 6 个，2 最多有 3 个，3 最多有 2 个。则 $\{b_n\}$ 的生成函数为

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(1 + x^2 + x^4 + x^6)(1 + x^3 + x^6) \\ &= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 7x^6 + 7x^7 + 8x^8 + 8x^9 \\ &\quad + 8x^{10} + 7x^{11} + 7x^{12} + 5x^{13} + 4x^{14} + 3x^{15} + 2x^{16} + x^{17} + x^{18}. \end{aligned}$$

注意到，在该例子中，我们并非事先知道 b_n 的取值，而是先找到一个尚未展开为幂级数的函数 $f(x)$ 。将 $f(x)$ 展开后， x^n 的系数一定是 b_n 。于是，通过代数运算将 $f(x)$ 展开成幂级数，就能一次得到所有 b_n 的信息。

例 5.5 $1, 1, 1, 1, \dots$ 的生成函数为 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 。

我们知道，当 $|x| < 1$ 时，

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots.$$

为书写简便，我们常用 $\frac{1}{1-x}$ 表示 $1, 1, 1, \dots$ 的生成函数。

定义 5.6 如果函数 $g(x)$ 的幂级数展开式为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

我们也称 $g(x)$ 为序列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的生成函数。

例 5.7 由二项式定理， $\{\binom{n}{k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ 的生成函数是 $(1+x)^n$ 。这里约定，当 $k > n$ 时， $\binom{n}{k} = 0$ (有些作者不作这一约定)。

例 5.8 $\frac{1}{1-cx}$ 是 $1, c, c^2, c^3, c^4, \dots$ 的生成函数。

例 5.9 e^x 是 $\{\frac{1}{n!}\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的生成函数。

例 5.10 $\frac{1}{(1-x)^n}$ 是什么序列的生成函数？注意到

$$\frac{1}{(1-x)^n} = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^n,$$

利用乘法分配律展开等式右边，我们注意到 x^k 的系数为集合

$$\{(z_1, z_2, \dots, z_n) \mid z_1 + z_2 + \dots + z_n = k, z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, \dots, z_n \geq 0\}$$

的大小，也就是 $\binom{n}{k}$ 。因此， $\frac{1}{(1-x)^n}$ 是序列 $\{\binom{n}{k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ 的生成函数，即

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \dots.$$

例 5.11 在上例中, 将 x 替换成 $-x$, 我们得到

$$\frac{1}{(1+x)^n} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 - \binom{n}{3}x^3 + \cdots.$$

由此, 可以看出 $\frac{1}{(1+x)^n}$ 是序列 $\{(-1)^k \binom{n}{k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ 的生成函数。

见习题 5.2。

例 5.12 回到引言的问题, 如果 a_n 表示有多少种方法将 n 写成若干个 1, 2, 3 的和, 则 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的生成函数是

$$(1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}.$$

下面我们运用生成函数解决一些组合问题。

例 5.13 将 k 个相同的糖果分给甲、乙、丙、丁四个人, 其中甲最多分到 2 个糖果。一共有多少种分法? 该问题等价于问有多少组非负整数解 (z_1, z_2, z_3, z_4) 满足 $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = k$, 并且 $z_1 \leq 2$ 。我们可以考虑生成函数

$$(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+\cdots)^3 = \frac{1+x+x^2}{(1-x)^3} = \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^3} + \frac{x^2}{(1-x)^3},$$

中 x^k 的系数。我们只需将这三项的系数相加即可:

$$\binom{3}{k} + \binom{3}{k-1} + \binom{3}{k-2}.$$

这里约定负指标所对应的系数为 0。

例 5.14 将 18 个相同的糖果分给 5 个人, 其中每人至少分到 1 个、至多分到 6 个糖果。一共有多少种分法? 该问题等价于问有多少组正整数解 $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$ 满足 $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 18$ 并且 $1 \leq z_i \leq 6$ 。因此我们可以考虑

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^5$$

中 x^{18} 的系数。注意到

$$\begin{aligned} (x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^5 &= x^5(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^5 \\ &= x^5 \left(\frac{1-x^6}{1-x} \right)^5 \\ &= x^5 \cdot (1-x^6)^5 \cdot \frac{1}{(1-x)^5}. \end{aligned}$$

只需计算 $(1-x^6)^5 \cdot \frac{1}{(1-x)^5}$ 中 x^{13} 的系数。由于

$$\begin{aligned} (1-x^6)^5 \cdot \frac{1}{(1-x)^5} &= \left(\binom{5}{0} - \binom{5}{1}x^6 + \binom{5}{2}x^{12} - \binom{5}{3}x^{18} + \binom{5}{4}x^{24} - \binom{5}{5}x^{30} \right) \\ &\quad \cdot \left(\binom{5}{0} + \binom{5}{1}x + \binom{5}{2}x^2 + \binom{5}{3}x^3 + \cdots \right), \end{aligned}$$

我们可以得到 x^{13} 的系数为

$$\binom{5}{0} \binom{5}{13} - \binom{5}{1} \binom{5}{7} + \binom{5}{2} \binom{5}{1} = 780.$$

定义 5.15 如果 $f(x)$ 是序列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的生成函数, 我们定义

$$[f(x)]_{x^n} = a_n.$$

命题 5.16 设 $c \in \mathbb{R}$, $j, k \geq 0$, 并约定负指标所对应的系数为 0, 则

$$1. [cf(x)]_{x^k} = c[f(x)]_{x^k};$$

2. $\llbracket f(x) + g(x) \rrbracket_{x^k} = \llbracket f(x) \rrbracket_{x^k} + \llbracket g(x) \rrbracket_{x^k}$;
3. $\llbracket x^j f(x) \rrbracket_{x^k} = \llbracket f(x) \rrbracket_{x^{k-j}}$.

见习题 5.3、5.4。

命题 5.17 若 $f(x) = \sum_{i \geq 0} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i \geq 0} b_i x^i$, 则

$$\llbracket f(x) \cdot g(x) \rrbracket_{x^n} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{i+j=n} a_i b_j.$$

例 5.18 注意到 $(1+x)^{10} = (1+x)^4 \cdot (1+x)^6$ 。因此

$$\llbracket (1+x)^{10} \rrbracket_{x^k} = \llbracket (1+x)^4 \cdot (1+x)^6 \rrbracket_{x^k}.$$

左边等于 $\binom{10}{k}$, 右边等于

$$\sum_{i+j=k} \binom{4}{i} \binom{6}{j} = \sum_{i=0}^k \binom{4}{i} \binom{6}{k-i}.$$

因此, 我们得到

$$\binom{10}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{4}{i} \binom{6}{k-i}.$$

事实上, 同样的思路可以得到熟悉的 Vandermonde 恒等式:

定理 5.19 若 $m, n, k \geq 0$, 则

$$\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

例 5.20 $\llbracket \frac{1}{(1-x)^6} \rrbracket_{x^k} = \llbracket \frac{1}{(1-x)^5} \cdot \frac{1}{1-x} \rrbracket_{x^k}$ 。由卷积公式得 $\left(\binom{6}{k}\right) = \sum_{i=0}^k \left(\binom{5}{i}\right)$ 。更一般地, $\left(\binom{n}{k}\right) = \sum_{i=0}^k \left(\binom{n-1}{i}\right)$ (约定负指标系数为 0)。

例 5.21 $\llbracket (1+x)^6 \rrbracket_{x^k} = \llbracket (1+x)^5 (1+x) \rrbracket_{x^k}$ 。同理可得 $\binom{6}{k} = \binom{5}{k} + \binom{5}{k-1}$ 。

例 5.22 将 20 个相同小球放进 10 个不同盒子, 每个盒子最多有 5 个小球。习题 4.3 已用容斥算过; 现改用生成函数。该问题等价于问有多少组非负整数解 $(z_1, z_2, \dots, z_{10})$ 满足 $z_1 + z_2 + \cdots + z_{10} = 20$ 并且 $z_i \leq 5$ 。因此, 我们只需考虑

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^{10} = \left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^{10},$$

中 x^{20} 的系数:

$$\begin{aligned} \llbracket \left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^{10} \rrbracket_{x^{20}} &= \llbracket (1-x^6)^{10} \cdot \frac{1}{(1-x)^{10}} \rrbracket_{x^{20}} \\ &= \sum_{6i+j=20} \binom{10}{i} (-1)^i \left(\binom{10}{j}\right) \\ &= \binom{10}{0} \left(\binom{10}{20}\right) - \binom{10}{1} \left(\binom{10}{14}\right) + \binom{10}{2} \left(\binom{10}{8}\right) - \binom{10}{3} \left(\binom{10}{2}\right) \\ &= 2930455. \end{aligned}$$

由于这里的参数已经给定, 也可以直接考虑

$$\left(\binom{10}{0} - \binom{10}{1}x^6 + \binom{10}{2}x^{12} - \cdots\right) \left(\sum_{k \geq 0} \left(\binom{10}{k}\right) x^k\right),$$

中 x^{20} 的系数。

5.3 递推关系

递推关系可以生成许多有趣的序列。例如，斐波那契数列（Fibonacci）由如下递推关系生成：

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

我们可以计算出

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_2 &= F_1 + F_0 = 1 \\ F_3 &= F_2 + F_1 = 2 \\ F_4 &= F_3 + F_2 = 3 \\ F_5 &= F_4 + F_3 = 5 \\ &\dots \dots \end{aligned}$$

这种方法需要依次计算 $F_0, F_1, \dots, F_{99}$ ，才能得到 F_{100} 。那么，能否找到一个只依赖于 n 的函数 f ，使得 $F_n = f(n)$ ？若能找到，就可以直接计算 F_{100} ，而不必先知道 F_{99} 。

我们先看一个简单的例子：

例 5.23 如果 $a_0 = 1$ ，并且对 $n \geq 1$ ， $a_n = 4a_{n-1}$ 。我们是否可以找到一个关于 n 的函数 f ，使得 $a_n = f(n)$ ？该例子当然比较简单，我们可以猜到 f ，然后用数学归纳法验证猜测的正确性。（对于斐波那契数列，我们则很难猜到这样的函数。）我们下面看看如何通过生成函数找到 f 。我们令 $g(x)$ 表示 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的生成函数。如果我们能找到 $g(x)$ 的表达式，则 $a_n = \llbracket g(x) \rrbracket_{x^n}$ 。

由于对任意 $n \geq 1$ ，都有 $a_n = 4a_{n-1}$ ，所以

$$a_n x^n = 4a_{n-1} x^n = 4x a_{n-1} x^{n-1}.$$

对 $n \geq 1$ 求和，得

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = 4x \sum_{n \geq 1} a_{n-1} x^{n-1}.$$

于是

$$g(x) = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n x^n = a_0 + 4x \sum_{n \geq 1} a_{n-1} x^{n-1} = a_0 + 4x g(x).$$

即

$$g(x) = 1 + 4x g(x).$$

因此，

$$g(x) = \frac{1}{1-4x} = 1 + 4x + 4^2 x^2 + 4^3 x^3 + \dots.$$

所以

$$a_n = \llbracket g(x) \rrbracket_{x^n} = 4^n.$$

5.4 斐波那契数列（Fibonacci）的生成函数

沿用上一节的方法，设 $g(x)$ 为斐波那契数列的生成函数。对 $n \geq 2$ ，

$$F_n x^n = F_{n-1} x^n + F_{n-2} x^n = x F_{n-1} x^{n-1} + x^2 F_{n-2} x^{n-2}.$$

我们对其求和得

$$\sum_{n \geq 2} F_n x^n = x \sum_{n \geq 2} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n \geq 2} F_{n-2} x^{n-2}.$$

于是

$$g(x) = x + \sum_{n \geq 2} F_n x^n = x + xg(x) + x^2 g(x).$$

于是

$$g(x) = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

分母 $1-x-x^2 = -(x^2+x-1)$ 。令 $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 、 $b = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ，则 $x^2+x-1 = (x-a)(x-b)$ ，并且 $ab = -1$ 。于是

$$g(x) = \frac{x}{-(x-a)(x-b)} = \frac{x}{a-b} \left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x} \right).$$

因此

$$\begin{aligned} F_n &= [g(x)]_{x^n} \\ &= \frac{1}{a-b} \left[\frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x} \right]_{x^{n-1}} \\ &= \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{a^n} - \frac{1}{b^n} \right) \\ &= \frac{1}{a-b} \left(\frac{b^n - a^n}{a^n b^n} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n. \end{aligned}$$

注意到

$$\left| \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right| < \frac{1}{2},$$

即

$$\left| F_n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right| < \frac{1}{2}.$$

因此，

命题 5.24 F_n 是最接近 $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$ 的整数。 $\square$

5.5* 指数型生成函数

普通生成函数适合 $\left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ 这类计数。排列、满射等带阶乘的计数，改用指数型更方便。

定义 5.25 $f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k \frac{x^k}{k!}$ 是序列 $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 的指数型生成函数 (exponential generating function)。

例 5.26

- 序列 $\{1, 1, 1, 1, \dots\}$ 的指数型生成函数为 e^x ，普通生成函数为 $\frac{1}{1-x}$ 。
- 序列 $\{1, c, c^2, c^3, c^4, \dots\}$ 的指数型生成函数为 e^{cx} ，普通生成函数为 $\frac{1}{1-cx}$ 。

例 5.27 $\frac{1}{1-x}$ 是序列 $\{k!\}_{k \in \mathbb{N}}$ 的指数型生成函数。

定义 5.28 如果 $f(x)$ 是序列 $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 的指数型生成函数，我们定义

$$[f(x)]_{x^k/k!} = a_k.$$

命题 5.29 $[f(x)]_{x^k/k!} = k! \cdot [f(x)]_{x^k}$ 。

例 5.30 $(1+x)^n = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$ 。因此，

$$[(1+x)^n]_{x^k/k!} = \binom{n}{k} \cdot k! = (n)_k.$$

定理 5.31 (卷积) 若 $a_j = \llbracket f(x) \rrbracket_{x^j/j!}$, $b_j = \llbracket g(x) \rrbracket_{x^j/j!}$, 则

$$\llbracket f(x)g(x) \rrbracket_{x^k/k!} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_j b_{k-j}.$$

见习题 5.5、5.6。

下面利用指数型生成函数求解变系数线性递推的通项。

例 5.32 设

$$\begin{aligned} b_0 &= 2, \\ b_n &= nb_{n-1}, \quad n > 0. \end{aligned}$$

求 b_n 的通项公式。

设 $f(x) = \sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^n}{n!}$ 为序列 $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的指数型生成函数。对于 $n > 0$, 由于 $b_n = nb_{n-1}$, 有

$$b_n \frac{x^n}{n!} = nb_{n-1} \frac{x^n}{n!} = b_{n-1} x \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

两边对 $n > 0$ 求和, 得

$$\sum_{n \geq 1} b_n \frac{x^n}{n!} = x \sum_{n \geq 1} b_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = xf(x).$$

而等式左边等于 $f(x) - b_0 = f(x) - 2$, 因此

$$f(x) = \frac{2}{1-x}.$$

从而

$$b_n = \llbracket f(x) \rrbracket_{x^n/n!} = 2n!.$$

5.6* 第二类 Stirling 数的生成函数

固定 k , 令 $\{S(n, k)\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的普通生成函数为 $f_k(x)$, 即

$$f_k(x) = S(0, k)x^0 + S(1, k)x^1 + S(2, k)x^2 + \cdots.$$

则 $f_0(x) = S(0, 0) = 1$ 。

利用 $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$, 对 $k > 0$, 我们得到

$$f_k(x) = xf_{k-1}(x) + kxf_k(x).$$

因此,

$$f_k(x) = \frac{x}{1-kx} f_{k-1}(x).$$

于是,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{x}{1-x} f_0(x) = \frac{x}{1-x} \\ f_2(x) &= \frac{x}{1-2x} f_1(x) = \frac{x}{1-2x} \frac{x}{1-x} = \frac{x^2}{(1-x)(1-2x)} \\ f_3(x) &= \frac{x}{1-3x} f_2(x) = \frac{x}{1-3x} \frac{x^2}{(1-x)(1-2x)} = \frac{x^3}{(1-x)(1-2x)(1-3x)}. \end{aligned}$$

例 5.33 利用生成函数求解 $S(n, 2)$ 。由上面的公式, $f_2(x) = \frac{x^2}{(1-x)(1-2x)}$ 。写成 $\frac{x}{1-2x} - \frac{x}{1-x}$ (两端同乘 $(1-x)(1-2x)$ 即可验证), 于是

$$f_2(x) = \frac{x}{1-2x} - \frac{x}{1-x} = \sum_{n \geq 1} (2^{n-1} - 1)x^n,$$

因此当 $n \geq 1$ 时 $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$ (并有 $S(0, 2) = 0$)。

5.7* $P(n)$ 的生成函数

回顾 $P(n) = \sum_{k=0}^n P(n, k)$, 其中 $P(n, k)$ 表示将 n 写成 k 个加数的分拆方法数。令 $Q_k(n)$ 表示将 n 写成若干个不超过 k 的加数之和的方法数。每个加数 i 对应因子 $1 + x^i + x^{2i} + \cdots = \frac{1}{1-x^i}$, 故 $\{Q_k(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的生成函数是

$$f_k(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^k)}.$$

注意到当 $k \geq n$ 时, $Q_k(n) = P(n)$ 。因此, 在形式幂级数的意义下, $P(n)$ 的生成函数为

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1-x^i}.$$

5.8 习题

习题 5.1 将 n 写成若干个 1, 2, 3 的和 (不计次序), 记方法数为 a_n 。求 a_8 。

习题 5.2 $\frac{x^3}{(1-3x)^7}$ 中 x^8 的系数是多少?

习题 5.3 计算 $[(x+x^2)^{10}]_{x^{14}}$ 。

习题 5.4 计算 $[\frac{(1+x)^2}{1-3x}]_{x^8}$ 。

习题 5.5 求 $[\frac{e^{2x}}{1-x}]_{x^k/k!}$ 。

习题 5.6 求 $[\frac{(1+x)^8}{e^x}]_{x^k/k!}$ 。

习题 5.7 找出下述问题需要考虑的生成函数 (写成紧凑形式), 并指出需要考虑的是哪一项的系数。

1. 把 14 把相同的叉子分给 10 个人, 并且每个人有 1 到 2 把叉子, 一共有多少种方法?
2. 苏打水有 1 瓶装、6 瓶装、12 瓶装、24 瓶装和 30 瓶装五种规格。要买恰好 k 瓶, 有几种方式?
3. 邮票有 3 分的, 也有 5 分、10 分和 12 分的。有多少种方式贴 75 分?
4. 一共有 5 种糖果, 如果每种至少拿 2 颗, 有多少种方式拿 24 颗糖果?
5. $z_1 + z_2 + z_3 = 15$ 有多少整数解? 其中要求 $0 \leq z_i \leq 8$ 。
6. 只用 1 分、5 分、10 分、25 分, 可以有多少种方法凑出 1 元?

习题 5.8 求下列各式中的指定系数。

1. $\frac{1}{(1-x)^{23}}$ 中 x^{60} 的系数。
2. $\frac{1+x+x^4}{(1-x)^5}$ 中 x^k 的系数。
3. $\frac{x}{(1-x)^8}$ 中 x^3 的系数。
4. $(x^9 + x^{10} + x^{11} + \cdots)^3$ 中 x^{50} 的系数。
5. $\frac{1+x}{(1-2x)^5}$ 中 x^{k-1} 的系数。

习题 5.9 下列方程有多少个整数解 (指出是哪个生成函数的哪一项系数即可)?

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 10,$$

其中 $z_i \geq 0$, $z_1 \leq 4$, z_2 是奇数, z_3 是素数, $z_4 \in \{1, 2, 3, 6, 8\}$ 。

习题 5.10 求方程 $6z_1 + 9z_2 + 20z_3 = 150$ 的非负整数解个数 (指出是哪个生成函数的哪一项系数即可)。

习题 5.11 利用 $\frac{1}{(1-x)^{m+n}} = \frac{1}{(1-x)^m} \frac{1}{(1-x)^n}$ 可以得到一个什么样的组合等式?

习题 5.12 利用卷积公式找到 $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^m}$ 中 x^k 的系数。

习题 5.13 设 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 且 $b \neq 0$ 。求 $\frac{a}{b+cx}$ 中 x^k 的系数。

习题 5.14 $a_0 = 2023$, $a_n = 3a_{n-1} + 2$ ($n \geq 1$)。利用生成函数求出 a_n 的通项公式。

习题 5.15 令 a_n 表示将 n 写成若干个 2021, 2022, 2023 之和的方法数, 则 $\{a_n\}$ 的生成函数是什么?

习题 5.16 将 2023 写成若干个 1, 2, 3 之和, 其方法数是哪个生成函数中哪一项的系数?

习题 5.17 $\frac{x}{(1-x)^5}$ 展开式中 x^6 的系数是多少?

习题 5.18 (限定使用生成函数方法) $a_0 = 1$, $a_n = 3a_{n-1} + 3^n$ ($n \geq 1$)。求 a_n 的通项公式。

习题 5.19 $a_0 = 1$, $a_n = 4a_{n-1} + 3$ ($n \geq 1$)。求 a_n 的通项公式。

习题 5.20 (限定使用生成函数方法) 若 $d_0 = 1$, $d_1 = 4$, $d_n = 4d_{n-1} - 4d_{n-2}$ ($n \geq 2$), 写出 d_n 的通项公式。

习题 5.21 $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_n = 4a_{n-1} - 8a_{n-2}$ ($n \geq 2$)。写出 a_n 的通项公式。

习题 5.22 $a_0 = -1$, $a_1 = -3$, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + n$ ($n \geq 2$)。写出 a_n 的通项公式。

习题 5.23 证明 $\sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n}{m-i} = \begin{cases} 0, & m \text{ 为奇数,} \\ (-1)^{\frac{m}{2}} \binom{n}{\frac{m}{2}}, & m \text{ 为偶数.} \end{cases}$

习题 5.24 证明 $\sum_{i=0}^m (-1)^i \left(\binom{n}{i} \right) \left(\binom{n}{m-i} \right) = \begin{cases} 0, & m \text{ 为奇数,} \\ \left(\binom{n}{\frac{m}{2}} \right), & m \text{ 为偶数.} \end{cases}$

习题 5.25 若 $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n$, 则 $\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{n}{i} = (-1)^k \binom{n-1}{k}$

习题 5.26 若 $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n$, 则 $\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{n}{k-i} = \binom{n-1}{k}$

习题 5.27 若 $n \geq m \geq 1$, $k \geq 0$, 则 $\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{n}{i} \left(\binom{m}{k-i} \right) = (-1)^k \binom{n-m}{k}$ 。

习题 5.28 若 $1 \leq n < m$, $k \geq 0$, 则 $\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{n}{i} \left(\binom{m}{k-i} \right) = \left(\binom{m-n}{k} \right)$

习题 5.29 $\frac{1+2x}{(1-x)^4}$ 展开式中 x^3 的系数是多少?

习题 5.30 写出 $\{2^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的生成函数。

习题 5.31 $(1+x+x^2+x^3)^6$ 展开式中 x^3 的系数是多少?

习题提示

1.1 函数共 30^{10} 个。严格单调增函数与 $[30]$ 的 10-子集一一对应, 共 $\binom{30}{10}$ 个。单调不减函数与取自 $[30]$ 的 10-多重集合一一对应, 共 $\left(\begin{smallmatrix} 30 \\ 10 \end{smallmatrix}\right)$ 个。

1.2 $f: [k] \rightarrow [n]$ 对应序列 $f(1)f(2)\cdots f(k)$; 单射对应排列; 严格单调增函数 f 对应子集 $\{f(1), \dots, f(k)\}$; 单调不减函数对应多重集合 $\{f(1), \dots, f(k)\}$ 。

1.3 允许空队列: 先决定各队人数 (取自 $[6]$ 的 9-多重集合), 再让 9 人依次入位, 共 $\left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 9 \end{smallmatrix}\right) \cdot 9!$ 。
不允许空队列: 先给每队一个空位, 再安排剩下 3 个空位, 共 $\left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \cdot 9!$ 。

1.4 (1) $9!$ 。

(2) 先让男生站成一圈 $4!$, 有 5 个空位, 女生排列 $5!$, 共 $4!5!$ 。

(3) 男生先站: $5! \cdot (6)_4$ 。女生先站: 先让女生站成一圈, 共 $3!$ 种; 4 个空位需先各放至少一把椅子, 再把剩下 2 把椅子放入这 4 个空位, 最后让男生入座, 共 $3! \cdot \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \cdot 6!$ 种。

1.5 选出 6 个数字后只有一种从小到大的排法, 故 $\binom{15}{6} = 5005$ 。

1.6 最大数字等于 6: $4 \cdot (5)_3 = 240$ 。最大数字 ≤ 6 : 即取自 $[6]$ 的 4-排列, $(6)_4 = 360$ 。

1.7 先固定一名男生。男生间有 8 个空位, 从中选 6 个安排女生, 再让其余 7 名男生、6 名女生入位: $\binom{8}{6} 7! 6!$ 。也可先让女生站成一圈, 共 $5!$ 种; 每个空位至少放一把椅子, 共有 $\left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ 种放法, 再让男生入位, 共 $8!$ 种。

1.8 全为正数时, $\frac{(n)_k}{k!} = \binom{n}{k}$ 是整数; 乘积含 0 时结论显然; 全为负数时取绝对值即可。

1.9 若两组所含的数合在一起为 $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$, 则分界只能在这 k 个数之间, 共有 $k-1$ 种分法。故答案为 $\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (k-1)$ 。另一种写法: 第一组的最大数是全部 n 个数中第 r 小的数时, 有 $2^{r-1}(2^{n-r}-1)$ 种, 总和为 $(n-2)2^{n-1} + 1$ 。

1.10 将 $[n]$ 的子集按是否含 1 以及子集元素个数的奇偶性分成四类。含 1 的奇数个元素的子集与不含 1 的偶数个元素的子集一一对应, 另一对亦然。于是奇数个与偶数个一样多, 各 2^{n-1} 。

1.11 结果用多重集合表示, 共 $\left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) = 252$ 。互不相同时为 $\binom{6}{5} = 6$ 。

1.12 先各发一颗, 剩下 11 颗对应取自 $[5]$ 的 11-多重集合, $\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 11 \end{smallmatrix}\right) = 1365$ 。一般地为 $\left(\begin{smallmatrix} n \\ k-n \end{smallmatrix}\right)$ 。

1.13 $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 10 \end{smallmatrix}\right) = 66$ 。

1.14 按 $x_4 = 0, 1, 2, 3$ 分类: $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 15 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 11 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 7 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = 260$ 。

1.15 先将其余 8 把排成一圈 $7!$, 再把两把相同颜色的椅子放入 8 个空位 (可同空位), $\left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ 。共 $7! \cdot \left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = 181440$ 。

1.16 $\binom{8}{3} = 56$ 。

1.17 $2^6 = 64$ 。

1.18 $2\binom{7}{4} = 70$ 。

1.19 $7 \cdot 6^2 = 252$ 。

1.20 $10 \sum_{k \geq 1} \binom{9}{k-1} = 10 \cdot 2^9 = 5120$ 。

1.21 $\left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 9 \end{smallmatrix}\right) = \binom{14}{9} = 2002$ 。

1.22 $2^{10-1} = 512$ 。

1.23 93。

1.24 $\sum_{i=0}^6 \binom{6}{i} = 2^6 = 64$ 。

1.25 $3! \cdot \binom{4}{3} = 120$ 。

2.1 将 i 与 $2n+1-i$ ($i \leq n$) 放入第 i 个盒子。S 有 $n+1$ 个数、 n 个盒子，故有一盒两数，其和为 $2n+1$ 。

2.2 若每笼至多 $n_i - 1$ 只，总数至多 $\sum n_i - k$ ，与假设矛盾。

2.3 第 i 盒放 $\{2i-1, 2i\}$ 。 $n+1$ 个数入 n 盒，必有一盒两数，差为 1。

2.4 六盒：(1, 3), (2, 4), (5, 7), (6, 8), (9, 11), (10, 12)。七个数入六盒，同盒则差为 2。

2.5 写 $a = 2^k m$ (m 奇数)，令 $f(a) = m$ 。取值只有 n 个奇数。存在 $a_1 < a_2$ 使 $f(a_1) = f(a_2)$ ，从而 $a_1 \mid a_2$ 。

2.6 略。

2.7 一列有 3 格，共有 $2^3 = 8$ 种染色方式。表中共有 9 列，由鸽笼原理知，一定存在染色方式相同的两列。

2.8 按模 3 的余数分类。若三种余数都出现，则各取一个；若余数 $i \in \{0, 1, 2\}$ 没有出现，则另外两类中至少有一类含有 3 个数。

2.9 略。

2.10 将给定的正整数依次记为 $a_1, \dots, a_n$ ，并定义 $f: [n] \rightarrow \{0, 1, \dots, n-1\}$ 为 $f(i) = a_i \bmod n$ 。若 f 不是单射，则某两个数之差能被 n 整除；否则 f 是双射，必有两个数的余数分别为 1 和 $n-1$ ，它们的和能被 n 整除。

2.11 设置这样几个盒子：(1, 4), (2, 5), (3, 6), (7, 10), (8, 11), (9, 12), (13, 16), (14, 17), (15, 18)。任取 10 个数，则至少有两个数在同一个盒子中，它们的差为 3。

2.12 将给定的正整数依次记为 $a_1, \dots, a_{n+1}$ ，定义 $f: [n+1] \rightarrow \{0, 1, \dots, n-1\}$ 为 $f(i) = a_i \bmod n$ 。由鸽笼原理知，存在不同的 i, j 使得 $f(i) = f(j)$ ，从而 $a_i - a_j$ 能被 n 整除。

3.1 定义域中恰有一个元素取值为 7，其余四个在 $[6]$ 中取值： $5 \times (6)_4 = 1800$ 。

3.2 (1) $5^5 - 4^5 = 2101$ 。

(2) 每个 i 不能取 i ，共 $(n-1)^n$ 。

(3) 穷举得 9。更系统的做法见容斥。

3.3 按 $|f^{-1}(1)| = i$ 分类，并用 $\varphi(k, 2) = 2^k - 2$ ，得 $180 + 210 + 120 + 30 = 540$ 。

3.4 k 个相同小球放进 n 个不同盒子，按最左边有球的盒子编号分类，得 $\binom{n}{k}$ 。

3.5 恰有一个 $i \in [9]$ 有两个原像： $\binom{10}{2} 9! = 16329600$ 。

3.6 递推得 $S(8, 5) = 1050$ ，满射数为 $1050 \cdot 5! = 126000$ 。

3.7 代数上展开两次递推即可。组合上按 n 号与 $n-1$ 号球是否单独占盒、是否同盒分类。

3.8 (1) $S(40, 10) \cdot 10!$ ；(2) $\binom{10}{40}$ ；(3) $\sum_{j=1}^{10} S(40, j)$ ；(4) $P(40, 10)$ ；(5) $(40)_{10}$ ；(6) $\binom{40}{4} 9^{36}$ 。

3.9 由 $P(n, k) = P(n-1, k-1) + P(n-k, k)$ ，当 $k \leq n < 2k$ 时 $P(n-k, k) = 0$ 。

3.10 $\binom{52}{13, 13, 13, 13}$ 。

3.11 (1) $\binom{7}{2, 0, 1, 3, 1} = 420$ ；(2) $\binom{6}{3, 1, 2} \cdot 2^3 \cdot (-3) \cdot 5^2 = -36000$ 。

3.12 $x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3y^2x + 3y^2z + 3z^2x + 3z^2y + 6xyz$ 。

3.13 $\binom{4}{10} = 286$ 。

3.14 $\binom{5}{8} = 198$ 。

3.15 满射个数为 $S(7, 4) \cdot 4!$ 。计算 $S(7, 4)$ ：

- $S(5, 3) = S(4, 2) + 3S(4, 3) = 7 + 3 \cdot 6 = 25$;
- $S(6, 4) = S(5, 3) + 4S(5, 4) = 25 + 4 \cdot 10 = 65$;
- $S(6, 3) = S(5, 2) + 3S(5, 3) = 15 + 3 \cdot 25 = 90$;
- $S(7, 4) = S(6, 3) + 4S(6, 4) = 90 + 4 \cdot 65 = 350$ 。

于是 $S(7, 4) \cdot 4! = 350 \cdot 24 = 8400$ 。

3.16 略。

3.17 $S(5, 1) + S(5, 2) + S(5, 3) + S(5, 4) + S(5, 5) = 1 + 15 + 25 + 10 + 1 = 52$ 。

3.18 略。

3.19 (1)

- 考虑最小加数是否为 1:
- 若最小加数为 1, 则剩余 $n-1$ 写成 $k-1$ 个不同加数的和, 且每个加数 ≥ 2 , 等价于将 $n-k$ 写成 $k-1$ 个不同加数的和, 即 $Q(n-k, k-1)$ 。
- 若最小加数 ≥ 2 , 则每个加数 ≥ 2 , 等价于将 $n-k$ 写成 k 个不同加数的和, 即 $Q(n-k, k)$ 。

(2) $Q(15, 3) = Q(12, 2) + Q(12, 3) = 5 + Q(9, 2) + Q(9, 3) = 5 + 4 + Q(6, 2) + Q(6, 3) = 5 + 4 + 2 + 1 = 12$ 。

3.20 略。

3.21 令 S 表示所有 $[n] \rightarrow [n]$ 的双射的集合, 则 $|S| = n!$ 。对 $1 \leq j \leq n-1$, 设

$$A_j = \{f \in S \mid \forall i < j, f(i) = i \text{ 并且 } f(j) \neq j\}.$$

则 $|A_j| = (n-j)(n-j)!$ 。注意到 $S = A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1} \cup \{\text{id}\}$ (由于 $A_n = \emptyset$, 所以没有写出), 其中 $\text{id}(i) = i$ 。由加法原理得

$$n! = (n-1)(n-1)! + (n-2)(n-2)! + \cdots + 2(2!) + 1(1!) + 1 = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} j(j!).$$

3.22 等式右边表示将 n 个相同小球放入 m 个不同盒子中 (盒子中小球数量没有限制) 的方法数。

- 令 a_j 表示恰有 j 个盒子有球的情况数, 则 $a_j = \binom{m}{j} \left(\binom{j}{n-j} \right)$ 。
- 对 j 求和即可。

3.23 $\binom{n}{k}$ 表示把 k 个相同小球放进 n 个不同盒子、每盒至多一个的放法数。 $\binom{n-3}{k}$ 表示只使用 4, 5, $\dots$, n 号盒子时的放法数。因此, 两者之差表示 1, 2, 3 号盒子中至少有一个盒子有球。令 a_i 表示第 i 个盒子有球, 而所有 $j < i$ 号盒子都没有球的方法数, 则

$$a_i = \binom{n-i}{k-1}.$$

于是, $\binom{n}{k} - \binom{n-3}{k} = a_1 + a_2 + a_3$ 。

3.24 等号右边表示 n 个相同小球放进 m 个不同盒子, 盒子中小球数量没有限制。设这些盒子中有 k 个红盒子、 $m-k$ 个蓝盒子。令 a_j 表示红盒子中有 j 个球的情况, 则 $a_j = \binom{k}{j} \binom{m-k}{n-j}$ 。由加法原理得

$$\sum_{j=0}^n a_j = \sum_{j=0}^n \left(\binom{k}{j} \right) \left(\binom{m-k}{n-j} \right) = \binom{m}{n}.$$

3.25 (1) $\binom{m}{n} \binom{n}{k}$ 表示从 m 个人中选取 n 个人成为一个小组, 再从中选择 k 名组长。这等同于先选好 k 个组长, 再从剩下的人中选 $n-k$ 名组员。于是, $\binom{m}{n} \binom{n}{k} = \binom{m}{k} \binom{m-k}{n-k}$ 。

(2) 等式左边等于

$$\sum_{k=0}^n \binom{m}{k} \binom{m-k}{n-k} = \binom{m}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{m}{n} 2^n.$$

3.26

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^m (-1)^n \binom{m}{n} \binom{n}{k} &= \binom{m}{k} (-1)^k \sum_{n=k}^m (-1)^{n-k} \binom{m-k}{n-k} \\ &= \binom{m}{k} (-1)^k (1-1)^{m-k} = 0.\end{aligned}$$

3.27 两边乘以 $n+1$, 左边等于

$$\sum_{k=0}^n \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} = 2^{n+1} - 1.$$

3.28 等式右边等于 $\binom{m+n+1}{m+1}$, 表示将 $m+1$ 个小球放进 $m+n+1$ 个不同盒子, 每个盒子最多有一个小球。盒子依次编号为 $1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n, m+n+1$ 。令 a_k 表示第 $m+k$ 号盒子有球, 而所有编号大于 $m+k$ 的盒子都没有球, 则

- $a_k = \binom{m+k-1}{m}$, k 从 1 到 $n+1$ 。
- $a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} = \binom{m+n+1}{m+1}$ 。

于是, 等式左边等于

$$\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} = \binom{m+n+1}{n}.$$

3.29 略。

3.30 略。

3.31 右侧表示将 $m+\ell+1$ 个小球放进 $n+1$ 个不同盒子, 每个盒子最多有一个小球。将盒子从左到右依次编号为 $1, 2, 3, \dots, n+1$ 。

令 a_k 表示从左往右数第 $m+1$ 个小球恰好放在第 $k+1$ 个盒子的放法数, 则 $a_k = \binom{k}{m} \binom{n-k}{\ell}$ 。

于是, 等式左边等于

$$\sum_{k=0}^n a_k = \binom{n+1}{m+\ell+1}.$$

于是, 等式成立。

3.32 等式右侧表示将 n 个小球放入 $2n$ 个不同盒子, 每个盒子最多有一个小球。盒子一共有 n 个红色盒子和 n 个白色盒子。令 a_k 表示红色盒子中有 k 个小球, 则 $a_k = \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$ 。

于是, 等式左边等于

$$\sum_{k=0}^n a_k = \binom{2n}{n}.$$

于是, 等式成立。

3.33 只需证明

$$\sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)(k+2)}{6} = \sum_{k=1}^n \binom{k+2}{3} = \sum_{k=3}^{n+2} \binom{k}{3} = \binom{n+3}{4}.$$

右侧表示将 4 个小球放入 $n+3$ 个依次编号的不同盒子, 每个盒子至多有一个小球。

令 a_k 表示 k 号盒子有球、其左侧有 3 个球、右侧没有球的结果数, 则 $a_k = \binom{k-1}{3}$ 。其中 k 从 4 到 $n+3$ 。

于是, 等式左边等于

$$\sum_{k=4}^{n+3} a_k = \sum_{k=3}^{n+2} \binom{k}{3} = \binom{n+3}{4}.$$

于是, 等式成立。

3.34 略。

3.35 略。

3.36 等号右边为 $\binom{2n}{n+1}$, 表示将 $n+1$ 个小球放进 $2n$ 个不同盒子, 每个盒子最多有一个小球。将前 n 个盒子标记为红色, 后 n 个标记为白色。

令 a_j 表示白色盒子里有 j 个球, 而红色盒子里有 $n+1-j$ 个球。当 $1 \leq j \leq n$ 时, $a_j = \binom{n}{n-j+1} \binom{n}{j} = \binom{n}{j-1} \binom{n}{j}$ 。

于是, 等式左边等于

$$\sum_{j=1}^n a_j = \binom{2n}{n+1}.$$

于是, 等式成立。

3.37 略。

3.38 选正副组长。

3.39 选人数不定的小组, 并且指定一名组长。

3.40 $\binom{5}{1,2,2} 2^2 = 120$ 。

3.41 $\binom{6}{3,1,2} 3^3 \cdot 2 = 3240$ 。

3.42 利用 $P(n, k) = P(n-1, k-1) + P(n-k, k)$, 计算

$$\begin{aligned} P(17, 3) &= P(16, 2) + P(14, 3) \\ &= 8 + P(13, 2) + P(11, 3) \\ &= 14 + P(10, 2) + P(8, 3) \\ &= 19 + P(7, 2) + P(5, 3) \\ &= 22 + P(4, 2) + P(2, 3) \\ &= 24. \end{aligned}$$

3.43 $\binom{6}{2} = 15$ 。

3.44 由于 $P(2032, 2025) = \sum_{i=1}^7 P(7, i)$, 我们依次计算

- $P(7, 1) = P(7, 6) = P(7, 7) = 1$;
- $P(7, 2) = 3$;
- $P(7, 3) = P(6, 2) + P(4, 3) = 3 + 1 = 4$;
- $P(7, 4) = P(6, 3) + P(3, 4) = P(5, 2) + P(3, 3) = 3$;
- $P(7, 5) = P(6, 4) = P(5, 3) = P(4, 2) = 2$ 。
- $P(2032, 2025) = \sum_{i=1}^7 P(7, i) = 15$ 。

3.45 我们需要计算 $S(6, 1) + S(6, 2) + S(6, 3) + S(6, 4) + S(6, 5)$ 。利用

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k) \quad \text{及} \quad S(n, n-1) = \binom{n}{2},$$

依次计算出

- $S(6, 1) = 1$;
- $S(6, 2) = 2^5 - 1 = 31$ 。
- $S(6, 3) = S(5, 2) + 3S(5, 3) = 90$;
- $S(6, 4) = S(5, 3) + 4S(5, 4) = 65$;
- $S(6, 5) = \binom{6}{2} = 15$ 。
- $S(6, 1) + S(6, 2) + S(6, 3) + S(6, 4) + S(6, 5) = 1 + 31 + 90 + 65 + 15 = 202$ 。

3.46 $2^7 - 1 = 127$ 。

3.47 $\binom{5}{3} 2^3 3^2 = 720$ 。

4.1 令 $\mathcal{P} = \{P_2, P_3\}$, 其中 P_i 表示被 i 整除。写出各 $N_{\geq}(J)$ 后代入基本形式, 应得到与例中相同的 33。

4.2 对恰好满足性质集 $T \supseteq S$ 的元素计算贡献: 贡献为 $\sum_{S \subseteq J \subseteq T} (-1)^{|J|-|S|}$, 仅当 $T = S$ 时为 1, 否则为 0。

4.3 P_i : 第 i 盒至少 6 个球。容斥得 $\binom{10}{20} - \binom{10}{1} \binom{10}{14} + \binom{10}{2} \binom{10}{8} - \binom{10}{3} \binom{10}{2} = 2930455$ 。先各放 1 个后再限制至多 5 个: $\binom{10}{10} - \binom{10}{1} \binom{10}{5} + \binom{10}{2} \binom{10}{0} = 72403$ 。

4.4 P_i : 至少 3 个元素映到 i 。容斥得 $7^6 - \binom{7}{1}(\binom{6}{3}6^3 + \binom{6}{4}6^2 + \binom{6}{5}6 + \binom{6}{6}) + \binom{7}{2}\binom{6}{3} = 83790$ 。

4.5 $\mathcal{P} = \{P_3, P_5, P_7\}$ 。容斥得 $630 - 210 - 126 - 90 + 42 + 30 + 18 - 6 = 288$ 。

4.6 略。

4.7 略。

4.8 令 $\mathcal{U}$ 表示所有解的集合, $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3\}$, 其中 $P_i(x_1, x_2, x_3)$ 表示 $x_i = i$ 。于是

- $N_{\geq}(\emptyset) = \binom{3}{11} = 78$;
- $N_{\geq}(\{P_1\}) = \binom{2}{10} = 11$;
- $N_{\geq}(\{P_2\}) = \binom{2}{9} = 10$;
- $N_{\geq}(\{P_3\}) = \binom{2}{8} = 9$;
- $N_{\geq}(\{P_1, P_2\}) = N_{\geq}(\{P_1, P_3\}) = N_{\geq}(\{P_2, P_3\}) = 1$;
- $N_{\geq}(\{P_1, P_2, P_3\}) = 0$ 。

由容斥原理得 $N_{=}(\emptyset) = 78 - 11 - 10 - 9 + 1 + 1 + 1 = 51$ 。

4.9

- $N_{\geq}(\emptyset) = 1925$;
- $N_{\geq}(\{P_5\}) = 5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$;
- $N_{\geq}(\{P_7\}) = 5^2 \cdot 11 = 275$;
- $N_{\geq}(\{P_{11}\}) = 5^2 \cdot 7 = 175$;
- $N_{\geq}(\{P_5, P_7\}) = 55$;
- $N_{\geq}(\{P_5, P_{11}\}) = 35$;
- $N_{\geq}(\{P_7, P_{11}\}) = 25$;
- $N_{\geq}(\{P_5, P_7, P_{11}\}) = 5$ 。

$N_{=}(\emptyset) = 1925 - 385 - 275 - 175 + 55 + 35 + 25 - 5 = 1200$ 。

4.10 $5! - 4 \cdot 4! + 6 \cdot 3! - 4 \cdot 2! + 1 = 53$ 。

4.11 注意到右侧等于 $\binom{n}{n-m}$ 。

4.12 略。

5.1 $a_8 = 10$ 。

5.2 即 $\frac{1}{(1-3x)^7}$ 中 x^5 的系数: $\binom{7}{5} 3^5$ 。

5.3 $(x+x^2)^{10} = x^{10}(1+x)^{10}$, 故为 $\binom{10}{4}$ 。

5.4 $\frac{1}{1-3x} = \sum 3^n x^n$, 故系数为 $3^8 + 2 \cdot 3^7 + 3^6$ 。

5.5 e^{2x} 的指数型系数为 2^j , $\frac{1}{1-x}$ 的指数型系数为 $n!$ 。卷积得 $\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} 2^j (k-j)!$ 。

5.6 即 $[(1+x)^8 e^{-x}]_{x^k/k!} = \sum_{j=0}^{\min(k,8)} \binom{k}{j} \binom{8}{j} j! (-1)^{k-j}$ 。

5.7 (1) $(x+x^2)^{10}$ 中 x^{14} 的系数。

(2) $\frac{1}{(1-x)(1-x^6)(1-x^{12})(1-x^{24})(1-x^{30})}$ 中 x^k 的系数。

(3) $\frac{1}{(1-x^3)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{12})}$ 中 x^{75} 的系数。

(4) $\frac{x^{10}}{(1-x)^5}$ 中 x^{24} 的系数。

(5) $(1+x+\cdots+x^8)^3$ 中 x^{15} 的系数。

(6) $\frac{1}{(1-x)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{25})}$ 中 x^{100} 的系数。

5.8 (1) $\left(\begin{smallmatrix} 23 \\ 60 \end{smallmatrix}\right)$; (2) $\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ k \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ k-1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ k-4 \end{smallmatrix}\right)$; (3) $\left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$; (4) $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 23 \end{smallmatrix}\right)$; (5) $\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ k-1 \end{smallmatrix}\right) 2^{k-1} + \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ k-2 \end{smallmatrix}\right) 2^{k-2}$ 。

5.9 $(1+x+x^2+x^3+x^4)(x+x^3+x^5+x^7+x^9)(x^2+x^3+x^5+x^7)(x+x^2+x^3+x^6+x^8)$ 中 x^{10} 的系数。

5.10 $\frac{1}{(1-x^6)(1-x^9)(1-x^{20})}$ 中 x^{150} 的系数。

5.11 $\left(\begin{smallmatrix} m+n \\ k \end{smallmatrix}\right) = \sum_{i=0}^k \left(\begin{smallmatrix} m \\ i \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} n \\ k-i \end{smallmatrix}\right)$ 。

5.12 $\sum_{i=0}^k \left(\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} m \\ k-i \end{smallmatrix}\right)$ 。

5.13 $\frac{a}{b} \left(-\frac{c}{b}\right)^k$ 。

5.14 生成函数 $f(x) = \frac{a_0+1}{1-3x} - \frac{1}{1-x}$, 故 $a_n = 2024 \cdot 3^n - 1$ 。

5.15 $\frac{1}{(1-x^{2021})(1-x^{2022})(1-x^{2023})}$ 。

5.16 $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$ 中 x^{2023} 的系数。

5.17 $\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) = 126$ 。

5.18 设 $f(x) = \sum a_n x^n$ 。由条件知

$$a_n x^n = 3x a_{n-1} x^{n-1} + (3x)^n, \quad n \geq 1.$$

求和得

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = 3x \sum_{n \geq 1} a_{n-1} x^{n-1} + 3x \sum_{n \geq 1} (3x)^{n-1}.$$

因而

$$f(x) - a_0 = 3x f(x) + \frac{3x}{1-3x}.$$

由此解得 $f(x) = \frac{1}{(1-3x)^2}$ 。

所以

$$a_n = [f(x)]_{x^n} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ n \end{smallmatrix}\right) 3^n = (n+1)3^n.$$

5.19 设 $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 。由 $a_n = 4a_{n-1} + 3$ ($n \geq 1$), 有

$$a_n x^n = 4x \cdot a_{n-1} x^{n-1} + 3x \cdot x^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

求和得

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = 4x \sum_{n \geq 1} a_{n-1} x^{n-1} + 3x \sum_{n \geq 1} x^{n-1}.$$

因而

$$f(x) - 1 = 4x f(x) + \frac{3x}{1-x}.$$

解得 $f(x) = \frac{1+2x}{(1-4x)(1-x)} = \frac{2}{1-4x} - \frac{1}{1-x}$ 。因此,

$$a_n = [f(x)]_{x^n} = 2 \cdot 4^n - 1.$$

5.20 设 $f(x) = \sum_n d_n x^n$ 。因为

$$d_n x^n = 4x d_{n-1} x^{n-1} - 4x^2 d_{n-2} x^{n-2}.$$

两边对 $n \geq 2$ 求和得

$$\sum_{n \geq 2} d_n x^n = 4x \sum_{n \geq 2} d_{n-1} x^{n-1} - 4x^2 \sum_{n \geq 2} d_{n-2} x^{n-2}.$$

因此,

$$f(x) - d_0 - d_1 x = 4x(f(x) - d_0) - 4x^2 f(x).$$

解得

$$f(x) = \frac{1}{(1-2x)^2}.$$

从而

$$d_n = \llbracket f(x) \rrbracket_{x^n} = 2^n \left(\binom{2}{n} \right) = (n+1)2^n.$$

5.21 略。

5.22 略。

5.23 略。

5.24 略。

5.25 略。

5.26 略。

5.27 由于 $(1-x)^{n-m} = (1-x)^n \cdot \frac{1}{(1-x)^m}$,

$$\llbracket (1-x)^{n-m} \rrbracket_{x^k} = (-1)^k \binom{n-m}{k}.$$

而由卷积公式

$$\llbracket (1-x)^n \cdot \frac{1}{(1-x)^m} \rrbracket_{x^k} = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{n}{i} \left(\binom{m}{k-i} \right).$$

得证。

5.28 略。

5.29 $\left(\binom{4}{3} \right) + 2 \left(\binom{4}{2} \right) = 40$ 。

5.30 $\frac{1}{1-2x}$ 。

5.31 $\left(\binom{6}{3} \right) = 56$ 。